DOI: 10.5433/1984-7939.2022v7n1p185

COMPREENSÃO DA MULTIPLICAÇÃO POR ESTUDANTES DO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Beatriz Pereira Pinto[1]
http://orcid.org/0000-0003-0308-824X

Sônia Bessa[2]
http://orcid.org/0000-0001-9857-6523

Resumo: Nesta investigação averiguou a compreensão da multiplicação por estudantes do quinto ano do ensino fundamental. Participaram 32 estudantes de uma escola pública no Distrito Federal. O instrumento utilizado foi a Prova dos Palitos, que permite classificar os estudantes em seis níveis de compreensão da multiplicação, do mais elementar ao mais complexo. Os resultados encontrados apontaram que os estudantes têm dificuldades com multiplicação e divisão com números naturais. Somente dois estudantes conseguiram compreender a operação "*n* vezes *x*" por antecipação mental, sem nenhum suporte empírico, e a reversibilidade necessária à operação de divisão. Os estudantes averiguados utilizavam com frequência a memorização da tabuada, contudo, esse mecanismo não lhes garantiu uma melhor compreensão da multiplicação.

Palavras-chave: estudantes de ensino fundamental; aritmética; multiplicação.

*

[1]Graduanda de Pedagogia pela Universidade Estadual de Goiás-UEG. E-mail: betriizp@gmail.com.

[2]Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Pós Doutora pela Universidade Federal do Triangulo Mineiro - UFTM. Professora da Universidade Estadual de Goiás (UEG). E-mail: soniabessa@gmail.com.

UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION BY FIFTH-GRADE STUDENTS

Abstract: This study investigated the understanding of multiplication by 32 students in the fifth year of elementary school from a public school in the Federal District of Brazil. The instrument used to assess their understanding of multiplication was the "Stick Test", which classifies students' performance into six levels, from the most elementary to the most complex one. The results found showed that students have difficulties with multiplication and division with natural numbers. Only two students were able to understand both the operation "*n* times *x*" doing mental calculation, without any empirical support, and the reversibility necessary for the operation of division. The students frequently memorized the multiplication table; however, this strategy did not guarantee a better understanding of multiplication.

Keywords: elementary students; arithmetic; multiplication.

COMPRENDER LA MULTIPLICACIÓN POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES EN EL QUINTO AÑO DE LA ESCUELA PRIMARIA

Resumen: Esta investigación investigó la comprensión de la multiplicación por parte de los estudiantes del quinto año de la escuela primaria. Participaron 32 alumnos de una escuela pública del Distrito Federal. El instrumento utilizado fue la Prueba de Palillos de Dientes, que permite clasificar a los estudiantes en seis niveles de comprensión de la multiplicación, desde el más elemental hasta el más complejo. Los resultados encontrados señalaron que los estudiantes tienen dificultades con la multiplicación y división con números naturales. Solo dos estudiantes pudieron comprender la operación "n por x" por anticipación mental, sin ningún apoyo empírico, y la reversibilidad necesaria para la operación de división. Los estudiantes investigados utilizaron con frecuencia la memorización de la tabla de multiplicar, sin embargo, este mecanismo no garantizó una mejor comprensión de la multiplicación.

Palabras clave: estudiantes de primaria; aritmética; multiplicación.

Introdução

A matemática, como outras linguagens, permite a participação das pessoas e a construção de novas aprendizagens na escola e para além dela. Ela é necessária à formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais. Não está restrita a um conjunto de técnicas de cálculo com números e grandezas, mas

As operações aritméticas de multiplicação e divisão alcançam sua maior importancia como objeto de estudo, entre o terceiro e quinto anos do Ensino Fundamental. A unidade temática "Números" da BNCC (BRASIL, 2017) para o 5º ano propõe que o estudante desenvolva a habilidade de resolver problemas de multiplicação e divisão com números naturais e racionais com representação decimal finita, envolvendo princípios multiplicativos na resolução e elaboração de problemas.

Essa investigação está organizada em cinco sessões incluindo essa introdução, na segunda sessão apresenta-se o marco teórico destacando investigações realizadas cujos estudos prévios destacam a presença de níveis de compreensão de multiplicação em estudantes do ensino fundamental, na terceira sessão estão contemplados os procedimentos metodológicos utilizados como a descrição da amostra, procedimentos e instrumento utilizado. Em sequência a apresentação dos principais resultados e discussão à luz de estudos prévios, destacando como conclusões os níveis de compreensão de multiplicação dos participantes. Por fim as considerações finais mais relevantes sobre a temática, limitações e sugestões para estudos futuros.

Muitos autores têm se dedicado ao estudo de como as crianças aprendem matemática. Jean Piaget se interessou pelo problema do conhecimento e buscou respostas no mundo infantil, investigando inicialmente uma lógica subjacente à linguagem. Para esse autor:

> [...] o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo nem de objetos [...] resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre os dois, [...] em decorrência de uma indiferenciação completa e não de intercâmbio entre formas distintas (PIAGET, 1978, p. 6).

Ao considerar a operação aritmética de adição, Kamii e Joseph (2008) esclarecem que o esquema de somar ou juntar quantidades é natural para as crianças, pois ocorre na sua vida cotidiana. Portanto, é necessário criar um ambiente solicitador, com uma variedade de situações em que o estudante possa construir uma rede de relações numéricas a fim de compreender todas as formas possíveis de construir um número, compondo uma hierarquia complexa de relações. Por exemplo, o 7 não é só um símbolo, mas uma relação numérica entre os objetos: 3 + 4, ou 5 + 2, 6 + 1, entre outros; logo, quando compreende essa rede, o estudante estabelece relações entre parte e todo e os agrupamentos.

Kamii e Joseph (2008, p. 62) descrevem que a adição “é a ação mental (abstração reflexiva) de combinar dois totais para criar um total de ordem superior no qual os totais anteriores se tornam duas partes.” Logo, é imprescindível que o aluno consiga construir relações e agrupamentos com os números para se recordar melhor do conhecimento que já estava assimilado anteriormente.

A multiplicação

Ao referir-se à operação de multiplicação, Kamii e Housman (2002) esclarecem que as crianças utilizam a adição repetida de início para apenas mais tarde passar a usar a multiplicação de fato. A distinção entre essas duas é que, na multiplicação, existe um raciocínio hierárquico. Uma operação 3 × 4 condiz com três grupos de quatro elementos ao mesmo tempo, sendo mais uma reflexão mental do que uma soma de três repetida quatro vezes. “Desse modo, é preciso deixar que a criança tenha autonomia e permitir que a mesma tome a própria decisão se irá começar por um modo ou por outro.” (ASSIS, 2013, p. 166).

Moro (2004) esclarece que a medida que as crianças vão elaborando as notações, elas vão construindo as invariantes de estruturas multiplicativas e aditivas, o que pressupõe um ambiente solicitador capaz de promover notações significativas como parte da aprendizagem da matemática. Contudo, a autora lembra que a construção das relações aritméticas é lenta e árdua e se apoia em outras invariantes com destaque para a correspondência operatória, (logo reversível), entre quantidades. “[...] Vê-se esta, em conjunto com a relação inclusiva parte-todo da composição-decomposição aditivo-subtrativa, como de presença necessária na compreensão da cardinalidade das coleções numéricas.” (MORO, 2004, p. 265).

O entendimento que as crianças fazem das operações de multiplicação e divisão lhes permite desvendar as diversas maneiras de chegar ao resultado, que podem ser registradas por meio de jogos, anotações, entre outros. Contudo, a autora alerta “[...] que pode-se esperar que crianças de primeiro ano resolvam problemas matemáticos de multiplicação com adição mas não com multiplicação.” (KAMII; HOUSMAN, 2002, p. 120).

Gómez-Granell (1983) destaca que efetuar operações de multiplicação e divisão é uma construção conceitual e não pode ser confundido com meios aprendidos e fixados na memória por sucessivas repetições. Essa autora reconhece duas aquisições fundamentais para a compreensão da multiplicação. A primeira seria a criança constatar a presença de um "operador" multiplicativo, que lhe permitiria fazer antecipações do número "n" de conjuntos. A segunda aquisição seria a capacidade da criança realizar uma compensação exata entre as duas variáveis "n" que seria o número de vezes ou de conjuntos e "x" o número de elementos de cada conjunto. Essas duas aquisições permitiriam a reversibilidade do pensamento e a coordenações de três variáveis: multiplicando, multiplicador e resultado final. A autora defende que a compreensão da noção de multiplicação implica na compreensão da divisão uma vez que são operações inversas, tais quais a adição e subtração. A fim de observar a presença do operador multiplicativo, Gómez-Granell (1983) propôs duas situações envolvendo compra e venda. Esta permitiria constatar as dificuldades encontradas na construção de multiplicação e divisão e as estratégias que as crianças utilizariam para superarem as dificuldades.

Por meio da primeira situação, é possível constatar se a criança tem a ideia do operador multiplicativo ou se apenas antecipa o número de moedas necessárias para a compra de "n" objetos. Na segunda situação, é possível verificar se as crianças são capazes de compreender diferentes formas de composição dentro de um mesmo conjunto e se antecipam quantos objetos poderiam ser comprados com o número "x" de moedas, sem sobrar ou faltar nenhuma. Nessa situação, a fim de obter êxito, é necessário à criança efetuar a divisão esgotando todas as possibilidades de compras e encontraria todos os divisores comuns do "x".

Pesquisadoras brasileiras utilizaram esse instrumento elaborado por Gómez-Granell (1983) em suas pesquisas como Brenelli (1994), Guimarães (1998, 2004); Silva (2003); Zaia (2013); Assis (2013); Bessa e Costa (2017, 2019).

Zaia (2013) adaptou a atividade de multiplicação de Gómez-Granell (1983) utilizando palitos em forma de figuras em duas situações de multiplicação e divisão. A primeira relaciona-se à compreensão da multiplicação pelos estudantes ao solicitar que eles elaborem representações de adição ou multiplicação com dois, três e quatro palitos, de tal forma que sejam capazes de perceber o todo, e as partes e o operador multiplicativo. A segunda parte consistiu em averiguar as diferentes formas de composição dentro de um mesmo conjunto e se as crianças seriam capazes de identificar todos os divisores comuns de 12 e 15. A partir das respostas das crianças, Zaia (2013) organizou seis níveis: IA, IB, IIA, IIB, IIIA e IIIB. Esses níveis progridem desde o nível de compreensão mais elementar até o mais complexo:

Nível IA – O estudante não chega à consciência do número de vezes que pegou determinada quantidade de palitos para fazer figuras com dois, três e quatro palitos;

Nível IB – O aluno não acredita que, com a mesma quantidade total, possa construir figuras de quantidades diferentes, sem sobrar ou faltar palitos;

Nível IIA – A multiplicação é parcialmente compreendida como adição de adições, porém o estudante não tem consciência da operação “n vezes x”. Utiliza tentativa e erro, não consegue realizar antecipações. Predomina o pensamento intuitivo quanto à multiplicação;

Nível IIB – O aluno antecipa composições possíveis, realiza cálculos mentais, mas ainda predominam procedimentos aditivos, embora se utilizem procedimentos multiplicativos com suporte empírico;

Nível IIIA – O estudante utiliza procedimentos multiplicativos por cálculo mental, mas não compreende ou usa a reversibilidade necessária à operação de divisão;

Nível IIIB – Fechando o raciocínio, o aluno alcança a reversibilidade necessária à operação de divisão. Em outras palavras, tem pensamento reversível e capacidade de compreender a operação de divisão.

Para Nogueira (2007), cada raciocínio é uma construção reversível e, para cada tipo de construção, corresponde um tipo de raciocínio. “As estruturas operatórias, portanto, são constituídas graças aos progressos da reversibilidade que lhes proporciona o caráter extra-temporal.” (NOGUEIRA, 2007, p. 106). Essa autora esclarece que, para compreender que A está contido em B, é necessário tanto a reversibilidade explicitada por A = B - A’, como a conservação necessária do todo B, uma vez separado A de seu complementar A’. A reversibilidade é fundamental para a compreensão da mobilidade do pensamento. Falando de outra forma, Piaget e

Szeminska (1981, p. 247) salientam que “Conceber as partes em função do todo e reciprocamente é compor simultaneamente as duas igualdades A+A’ = B e A = B-A’ e, portanto, é efetuar a operação inversa, tanto quanto a operação direta.”

Metodologia

Este estudo tem como objetivo averiguar e analisar o nível de compreensão da operação de multiplicação por estudantes do quinto ano do ensino fundamental. É um estudo de natureza descritiva com abordagem qualitativa. Participaram 32 estudantes das duas turmas de quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Planaltina, no Distrito Federal. Não foi possível compor a amostra aleatoriamente, porque a direção da escola preferiu que os estudantes fossem encaminhados pelos seus respectivos professores. A idade dos alunos variou entre 10 e 13 anos, assim distribuídos: dez com 10 anos, dezessete com 11 anos, quatro com 12 anos e somente um com 13 anos. Quanto ao gênero, foram 19 meninos e 13 meninas. Os 32 participantes foram designados pelas iniciais de seus nomes, de modo a preservar sua identidade. Na apresentação dos dados, serão usadas essas iniciais e a letra P, para designar a pesquisadora.

Como instrumento de avaliação dos níveis de ocmpreensão de multiplicação e divisão, foi utilizada a atividade denominada “Prova dos Palitos”, adaptada por Zaia (2013), que trata da multiplicação e divisão. Essa atividade permite explorar a operação de multiplicação, distinguindo-a da operação de divisão e permitindo ao estudante a capacidade de definir em quais ocasiões cada operação é mais adequada. A atividade tem duas partes, a primeira refere-se à compreensão da multiplicação ao constatar a presença do “operador multiplicativo” ou se a criança apenas antecipa o número de palitos necessários para fazer “n” figuras. Na segunda situação, é possível verificar se as crianças são capazes de compreender as diferentes formas de composição dentro de um mesmo conjunto, como por exemplo efetuar a divisão esgotando todas as possibilidades de figuras e encontrando todos os divisores comuns do “x” (12 e 15). A primeira situação averigua a compreensão da multiplicação pelos estudantes, a segunda a operação de divisão.

Sobre uma mesa, a pesquisadora dispõe aproximadamente 50 palitos de picolé e pede ao estudante que faça o maior número de figuras usando dois, três e quatro palitos por vez no tempo de 20 segundos. Quando o aluno termina de fazer utilizando os palitos, a pesquisadora pergunta-lhe quantos palitos ele usou ao todo, como chegou àquele resultado e se havia outra maneira de descobrir o total de palitos. Após realizar essa atividade com dois, três e quatro palitos, propõe-se ao estudante fazer o movimento inverso. É apresentada uma quantidade *x* de palitos (12 ou 15) e pergunta-se quantas figuras ele (a) pode fazer usando essa quantidade, sem sobrar nem faltar palitos. Inicia-se com 12 palitos, utilizando contra-argumentos, como questionar se tem certeza de que usou o mesmo número de palitos em cada figura e como fez para descobrir. Em seguida, realiza-se o mesmo procedimento com 15 palitos.

A aplicação da atividade fundamentou-se no método clínico, que é importante porque, no decorrer do exame, o experimentador não só leva em conta as hipóteses do estudante, mas ao mesmo tempo põe à prova essas hipóteses. “Por um movimento dialético, as respostas às perguntas ou dão lugar a novas perguntas com o fim de completar a informação que possibilite testar a hipótese ou, então, promovem uma verificação ou reformulação da mesma.” (CASTORINA, 1988, p. 60).

A atividade foi realizada de forma individual, com duração de aproximadamente 30 minutos, entre setembro e outubro de 2019. Foi registrada em áudio e vídeo mediante autorização da direção da escola e dos pais dos estudantes, exclusivamente para posterior análise das pesquisadoras. Aos pais foram apresentados os objetivos da investigação, esclarecida que a participação das crianças seria voluntária e demais orientações do Comitê de Pesquisa da Universidade Estadual de Goiás-UEG que garante sua privacidade e confiabilidade no sigilo das informações.

Resultados e discussão

Uma vez coletados os dados, as respostas foram classificadas de acordo com os níveis apresentados por Zaia (2013) e relacionadas com as variáveis idade e gênero dos estudantes. As informações obtidas foram examinadas de forma quanti-qualitativa, por meio da confecção de tabelas e de análise de conteúdo das respostas dos estudantes. A Tabela 1 apresenta essa distribuição.

Tabela 1 – Caracterização da amostra quanto às condutas encontradas

Condutas de multiplicação	Frequência	Porcentagem
Nível IA	1	3,1%
Nível IB	9	28,1%
Nível IIA	5	15,6%
Nível IIB	8	25,0%
Nível IIIA	7	21,9%
Nível IIIB	2	6,3%
Total	32	100%

Fonte: Autoras.

De todos os participantes investigados, 9 (28,1%) encontravam-se no nível IB. O nível IIB, com 8 (25,0%) estudantes, obteve a segunda maior concentração. No nível IIIA, estavam 7 (21,9%) estudantes e, no nível IIA, estavam 5 (15,6%). Os dois níveis com menor representatividade continham os mais e menos evoluídos nas condutas – o nível IA, com apenas 1 (3,1%) estudante, e o IIIB (6,3%), com outros 2 estudantes. Fazendo uma somatória, verifica-se que 24 (75%) estudantes estavam concentrados em três níveis (IB, IIB e IIIA).

Ao ser apresentada a solicitação de fazer figuras com diferentes quantidades de palitos, os estudantes no nível IB começaram a tomar consciência do número de figuras feitas ou do número de vezes que pegaram determinada quantidade de palitos, mas ainda não acreditavam que, com a mesma quantidade total, poderiam construir figuras de quantidades diferentes, sem sobrar ou faltar palitos. As respostas a seguir, do estudante G, caracterizam bem esse nível.

No começo da atividade, G conseguiu fazer figuras com dois, três e quatro palitos. Ao concluir as figuras com dois palitos, a pesquisadora lhe perguntou:

P: Quantas figuras você fez?

G: Cinco (olhou para as figuras e começou a contar os palitos de um em um antes de responder).

P: Quantos palitos você usou ao todo?

G: Usei 10 palitos.

P: Como você fez para descobrir isso?

G: Contei de um em um.

P: Haveria outro jeito que você poderia fazer? Diferente desse?

G: Contar de dois em dois.

P: O menino lá da sua sala me disse que tem outro jeito de contar, que seria 5 × 2, ou 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Ele está certo ou errado?

G: Sim, porque dá 10.

Foi proposto a G que fizesse figuras com três e, depois, com quatro palitos em cada figura. Em todas as situações, G contava os palitos como se fossem unidades. Ele não reconhecia a multiplicação como uma possibilidade. Quando questionado sobre a repetição aditiva ou a multiplicação, que são outras formas de realizar o cálculo, afirmava que estava certo, mas não conseguia formular uma argumentação coerente. Conseguiu fazer agrupamentos com dois, três e quatro palitos por tentativa e erro, mas não obteve sucesso ao contar de três em três ou de quatro em quatro. Sempre transformava os palitos em unidades para encontrar a quantidade total.

Após essa atividade incial, foram entregues 12 palitos a G, solicitando a ele que os organizasse de distintas formas, de modo que não poderiam faltar nem sobrar palitos. Nessa atividade, G teve dificuldade e foi agrupando os palitos de dois em dois, por sugestão da professora.

P: Quantas figuras você fez?

G: Seis.

P: Como você fez para descobrir que daria seis figuras com dois palitos cada?

G: Contei de dois em dois para descobrir isso.

P: Teria outras formas diferentes, com outras quantidades, sem sobrar ou faltar palitos? (G mexeu nos palitos, hesitou, e num esforço de tentativa e erro começou a fazer figuras com três palitos).

G: Vou conseguir fazer seis figuras, e que seria menos que o anterior, com dois palitos (fez quatro figuras utilizando três palitos em cada. Assim que concluiu, passou para o número 4 e rapidamente afirmou que poderia fazer as figuras com três e com quatro palitos – parece que nessa atividade houve uma tomada de consciência quanto aos agrupamentos).

> P: Você consegue utilizar dois, três e quatro palitos. Seria possível fazer figuras com cinco palitos sem sobrar ou faltar? (G começou a pensar e a manusear os palitos, tentando fazer novas formas).
>
> G: Vou conseguir fazer duas figuras e vai dar menos que o anterior, mas vai sobrar palitos, porque 5 é maior do que 4.

Nessa última situação, G utilizou a adição e a subtração como recurso, e o fez por meio do cálculo mental, mesmo que de forma rudimentar, mas aparentemente ainda não se apropriou do conceito da multiplicação. Todo o sucesso obtido foi por tentativa e erro. Ele não conseguiu ver a possibilidade da multiplicação nos palitos e nas formas, tampouco saber, mesmo que intuitivamente, quantas formas poderia construir sem sobrar ou faltar figuras.

Ao acertar os divisores de 12, G fez relação com os números pares, pelo fato de 12 ser um número par, ou seja, inferiu por tentativas e erros, não demonstrando antecipação mental. Kamii e Housman (2002) afirmam que crianças que ainda não compreendem a relação numérica entre a parte e o todo tendem a apenas adicionar números, pois é muito complexo para elas pensar ao mesmo tempo em dois totais. Logo, transformam o todo em unidades, contando de um em um, como verificado no exemplo do estudante G. Para Assis (2013), a reversibilidade ocorre quando a criança consegue ver o todo e as partes simultaneamente. Delval (1998, p. 73) complementa dizendo que "a criança organiza suas ações em sistemas de conjunto e realiza grandes progressos na aplicação de noções lógicas".

Entre os níveis encontrados, o IB estava representado por 9 (28,1%) estudantes. Esse é um nível de compreensão da multiplicação abaixo do esperado para estudantes do quinto ano do ensino fundamental. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como objetos de conhecimento para esse ano é apontado que o aluno aprimore "problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais." (BRASIL, 2017, p. 292).

O segundo nível, com 8 (25,0%) estudantes, foi o IIB. Nesse nível, o estudante já realiza cálculo mental por antecipação, contudo ainda predominam procedimentos aditivos. Para uma situação em que o número de palitos corresponde a quatro figuras de três, o estudante é capaz de afirmar que o processo envolvido corresponde a 3 + 3 +

3 + 3, ou seja, utiliza procedimentos aditivos. Se indagado sobre outras formas de calcular, ou se houver um contra-argumento de multiplicação, o aluno é capaz de operar por procedimentos multiplicativos, mas ainda utiliza suporte empírico, como os palitos, marcas de contagem ou os dedos. Vejamos a seguir o exemplo do estudante PD, de 13 anos, que se encontra nesse nível.

Na primeira situação, foi solicitado a P que fizesse figuras com dois palitos.

> P: Quantas figuras você fez?
>
> PD: Três (ficou muito tempo pensando em como fazer as figuras).
>
> P: Quantos palitos você usou ao todo?
>
> PD: Usei seis palitos.
>
> P: Como você fez para descobrir?
>
> PD: Fiz a conta de um em um.
>
> P: De que outro jeito você poderia fazer?
>
> PD: Não existe outro jeito.
>
> P: O menino da sua sala me disse que tem outro jeito de contar, que seria de dois em dois. Ele está certo ou errado?
>
> PD: Sim, está certo, porque ele foi contando de mais em mais.
>
> P: Outro menino da sua sala me disse que tem outro jeito de contar, que seria de 4 × 2. Ele está certo?
>
> PD: Sim, porque ele está dividindo (confundiu os termos “divisão” e “multiplicação”).

Após fazer outras tentativas com figuras compostas de três e quatro palitos, PD insistiu que não tinha outro jeito de contar que não fosse de um em um. E, quando usava a multiplicação, ia citando a tabuada para falar os resultados encontrados nos palitos. Parecia saber o resultado de 3 × 4 = 12, mas não conseguia explicá-lo com base nas figuras, pois não compreendia o processo subjacente à operação. O estudante demonstrou saber a tabuada. Contudo o elemento multiplicador, como descrito por Gómez-Granell (1983), ainda não foi compreendido. Para essa autora, enquanto o estudante não descobrir o papel do “operador multiplicativo”, não se pode considerar que a multiplicação foi compreendida, mesmo que o estudante realize adições sucessivas dos conjuntos.

Na segunda fase da atividade, foi solicitado ao estudante PD que organizasse figuras com 12 palitos de forma que não sobrassem nem faltassem palitos. Como PD apresentou dificuldade em compreender o que lhe fora solicitado, foi questionado:

P: Quantas figuras você pode fazer usando dois palitos em cada figura?
PD: Eu vou conseguir fazer quatro figuras.

P: Mas com dois palitos cada?

PD: Não. Será seis figuras com dois palitos e quatro figuras com três palitos cada.

Ao ser solicitado que verificasse se também daria para compor figuras utilizando a mesma quantidade de palitos, PD rapidamente ia fazendo as formas sobre a mesa e contando, sem apontar para os palitos (parecia que utilizava cálculo mental, mas recorria à contagem de um em um):

P: E com cinco palitos, é possível?

PD: Vou conseguir fazer três figuras, e que vai ser menos figuras que o anterior, e sobrou porque só deu dez e não tem mais para formar (confundiu três com duas figuras).

P: Com seus 12 palitos, você pode fazer várias figuras com várias quantidades. Com que outras quantidades de palitos pode fazer sem sobrar ou faltar?

PD: Com dois, quatro e seis palitos.

PD teve muita dificuldade em cálculo mental e recorria ao suporte empírico, com os dedos, marcas de contagem e os palitos. Ainda assim, chegou a reconhecer três dos divisores de 12 e, nas atividades finais, contava os agrupamentos de três em três.

Sete (21,9%) estudantes estavam no nível IIIA. Nesse nível, constata-se o uso frequente do cálculo mental e a percepção do “operador multiplicativo” descrito por Granel (1983); contudo, o recurso da reversibilidade (divisão) ainda está ausente. Em algumas ocasiões, os estudantes utilizaram a divisão como um processo multiplicativo. Investigação de Bessa e Costa (2019) constatou que em situações de divisão por quotas, ou partitivas, os estudantes utilizam a operação inversa à divisão, ou seja, a multiplicação.

Analisemos o caso do estudante J:

P: Quantas figuras você fez?

J: Duas.

P: Quantos palitos você usou ao todo?

J: Usei quatro palitos.

P: Como você fez para descobrir?

J: Fiz a conta de 2 × 2 (respondeu rapidamente).

P: De que outro jeito você poderia fazer?

J: 2 + 2, ou de um em um.

Em outras tentativas, com figuras compostas de três e quatro palitos, J sempre usava a multiplicação como primeira opção e dizia que existiam outros jeitos de contar, como 3 + 3 + 3 ou 3 × 3, ou ainda 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Na segunda parte da atividade (divisão), foi solicitado que J fizesse figuras usando 12 palitos, com a condição de não faltar ou sobrar palitos. Era esperado que o estudante fizesse figuras com os divisores de 12. J começou fazendo seis figuras com dois palitos e disse "*descobri quantos palitos tem aqui porque contei 6 + 6*". Posteriormente, fez o mesmo com três e quatro palitos em cada figura e recorria ao cálculo mental. Foi na sequência – dois, três, quatro e, ao chegar ao cinco, disse: "*vai sobrar palitos e não vai dar para usar os 12, e sobrou porque já tinha o máximo de figuras com os palitos*".

P: Acabou, não dá pra formar mais nenhuma figura?

J: Sim, com seis palitos (foi capaz de identificar quatro dos seis divisores de 12, mas teve dificuldade de relacionar os divisores 1 e 12. Só o fez mediante contra-argumento.)

P: E poderia ser uma figura com 12 palitos.

J: Sim, poderia.

P: E se fossem 12 figuras de um palito cada?

J: Também pode.

O estudante J foi classificado no Nivel IIIA porque demonstrou domínio completo da multiplicação e reversibilidade parcial da divisão, só reconheceu a existência de todos os divisores mediante contra-argumentos, é possível que com mais algumas intervenções o estudante chegaria ao Nível IIIB.

Somente dois estudantes de um universo de 32 conseguiram compreender a operação "*n* vezes *x*" por antecipação mental, sem o auxílio de suporte material. Eles utilizaram procedimentos multiplicativos por cálculo mental e compreenderam a reversibilidade necessária à operação de divisão.

As condutas encontradas foram relacionadas com a idade dos estudantes. A Tabela 2 apresenta os resultados. Curiosamente, das duas crianças que estão nos níveis mais evoluídos (IIIB), uma tem 10 anos, e a outra, 11 anos. O mesmo se repetiu no nível IIIA, com dois estudantes de 10 anos e cinco de 11 anos.

Tabela 2 – Condutas de multiplicação consoante ao ano escolar

Idade	Conduta					
	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB
10 Anos	-	2	1	4	2	1
11 Anos	1	6	2	2	5	1
12 Anos	-	1	2	1	-	-
13 Anos	-	-	-	1	-	-
Total	1	9	5	8	7	2

Fonte: Autoras.

Das nove crianças que se encontravam no nível IB, duas tinham 10 anos, seis tinham 11 anos e apenas uma tinha 12 anos. As crianças de 10 anos que estavam em idade escolar de acordo com a sua idade não possuíam registros de reprovação. Contudo, o mesmo não aconteceu com os alunos de 12 e 13 anos, cuja maioria estava em níveis mais elementares. Reprovar o ano escolar não foi garantia de melhor aprendizagem para esses estudantes. Esses resultados levantam outros questionamentos quanto à criança estar na idade certa, uma vez que somente os estudantes que não passaram por reprovação e cursam o ano escolar coerente com sua idade compreenderam a operação de multiplicação.

Somente duas crianças na "idade certa" se apropriaram da operação de divisão, tendo sido capazes de chegar à reversibilidade de pensamento e operar a partir do cálculo mental sem recorrer a nenhum suporte empírico. Esses dados são preocupantes, pois apontam para a necessidade de medidas de intervenção pedagógica com reforço escolar, para mais de 90% dos estudantes dessa amostra.

Embora esse não seja objeto de estudo dessa investigação, constatou-se que todos os estudantes utilizavam largamente a memorização da tabuada, e referiam-se a ela com frequência, contudo esse mecanismo não lhes garantiu uma melhor compreensão dessa operação. Para Faria e Maltempi (2020, p. 3),

> historicamente, a memorização tem sido valorizada no cenário educacional brasileiro e tem roubado do raciocínio o papel de protagonista. Especificamente na matemática escolar, a memorização de regras e técnicas têm acarretado consequências à aprendizagem matemática.

Outro elemento que pode comprometer a aprendizagem da multiplicação e divisão é o uso excessivo de algoritmos, sem a devida compreensão das operações implícitas. Para Nunes *et al.* (2001, p. 171), “ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre diferentes aspectos das situações que envolvem a multiplicação”.

Considerações finais

Os resultados desse estudo permitem inferir que a construção da noção de multiplicação não é um processo linear, mas complexo, lento com avanços, retrocessos e rupturas. Como já apregoava Vergnaud (1990), para compreender a conceituação em matemática, torna-se necessário o acompanhamento e a análise das produções dos participantes. Esse estudo permitiu essa análise.

Somente duas crianças de um universo de 32 conseguiram alcançar o nível IIIB e compreender a operação “n vezes x” por antecipação mental, sem nenhum suporte teórico ou empírico, essas duas crianças efetuaram procedimentos multiplicativos por cálculo mental e compreenderam a reversibilidade necessária à operação de divisão. No nível IIIA imediatamente anterior a este, encontramos, sete crianças, que, embora avançadas na compreensão da multiplicação, ainda não haviam se apropriado da reversibilidade necessária a compreensão plena da divisão. Nesses dois níveis mais evoluídos foram encontradas nove crianças que correspondem a 1/3 da amostra.

Para cinco crianças do nivel IIA, a multiplicação é parcialmente compreendida como adição de adições, elas não têm consciência da operação “n vezes x” (operador multiplicativo). Ainda não antecipavam, e não sabiam, antes de construí-las, quantas figuras poderiam montar com determinada quantidade total.

O nível IIB com oito crianças é um nível intermediário, porque elas já haviam se apropriado de procedimentos multiplicativos ainda que com suporte empírico e já realizavam diferentes composições por cálculo mental. Já antecipavam todas as composições possíveis, operando mentalmente, contudo seus procedimentos foram mais aditivos que multiplicativos, e eventualmente recorreram ao suporte empírico dos palitos. Pode ser verificada uma compensação exata: “número de figuras, vezes número de palitos em cada figura”, descobrindo a relação quantitativa “n vezes x”.

Assim ter-se-iam 15 crianças em níveis mais baixos (IA, IB e IIA) da compreensão da multiplicação, oito em um nível intermediário (IIB) e somente nove em um nível satisfatório (IIIA e IIIB). Esses resultados apontam para um quadro de defasagem quanto aos processos de ensino aprendizagem das operações aritméticas nos anos iniciais. Constata-se que mais de 2/3 dos estudantes têm dificuldade com a multiplicação e divisão com números naturais e possivelmente com os números racionais e decimais. Conforme proposto na Base Curricular Nacional, a expectativa seria que esses (as) estudantes nesse ano escolar tivessem a competência de operar com reversibilidade do pensamento, utilizando o cálculo mental através de um processo de abstração reflexiva e empregando ativamente os conceitos de múltiplos e divisores.

Esses resultados podem indicar dificuldades que parte desses estudantes terão em atingir as metas propostas pela BNCC – para o 5º ano, contudo é possível que a complexidade e os conteúdos propostos pela BNCC não levem em conta a maturidade intelectual das crianças dessa faixa etária e desse nível de escolaridade. Corre-se o risco de excluir as crianças que divergem do padrão curricular e culpabilizar escolas e professores pelo fracasso dos estudantes. Em crítica a BNCC, Branco *et al.* (2018, p. 60) salienta que esta:

> [...] consolida-se como mais um avanço da hegemonia e dos ideais neoliberais no contexto das políticas curriculares nacionais, [...] na contramão daquilo que se espera da escola pública que é garantir às novas gerações os conhecimentos historicamente sistematizados e uma formação humana emancipatória.

Esta investigação, apesar de bem elementar e com um número pequeno de estudantes, é importante por abrir possibilidades de novos estudos, com diferentes variáveis, como outros anos escolares, escolas públicas e privadas, de diferentes estados ou bairros.

Referências

BESSA, Sônia; COSTA, Váldina Gonçalves da. Operação de multiplicação: possibilidades de intervenção com jogos. *Revista Brasileira de Estudos Pedagogicos*, Brasília, v. 98, n. 248, p. 130-147, jan./abr. 2017.

BESSA, Sônia; COSTA, Váldina Gonçalves da. Apropriação do conceito de divisão por meio de intervenção pedagógica com metodologias ativas. *Bolema*, Rio Claro, v. 33, n. 63, p. 155-176, abr. 2019.

BRANCO, Emerson Pereira *et al*. Uma visão crítica sobre a implantação da base nacional comum curricular em consonância com a reforma do ensino médio. *Debates em Educação*, Maceió, v. 10, n. 21, p. 47–70, maio/ago. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*: educação é a base. Brasília: Mec, 2017.

BRENELLI, Rosely Palermo. A influência de atividades com os jogos QUILLES e cilada no operatório e na compreensão de noções aritméticas em crianças com dificuldades desempenho de aprendizagem. *Pro-posições*, Campinas, v. 5, n. 1, p. 21-36, mar. 1994. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644328. Acesso em: 7 mar. 2022.

CASTORINA, José Antônio. *Psicologia genética*: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1988.

DELVAL, Juan. *Crescer e pensar*: a construção do conhecimento na escola. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Raciocínio proporcional na matemática escolar. *Revista Educação em Questão*, Natal, v. 58, n. 57, p. 1-18, jul./set. 2020.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. Procesos cognitivos en aprendizaje de la multiplicación. *In:* MARIMÓN, Montserrat Moreno*. La pedagogía operatória***:** un enfoque constructivista de la educación. Barcelona: Laia, 1983. p. 129-147.

GUIMARÃES, Karina Perez. *Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação, via jogos de regras:* em busca de relações. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1988. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252585. Acesso em: 24 mar. 2021.
GUIMARÃES, Karina Perez. *Processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas multiplicativas*. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253428. Acesso em: 3 mar. 2021.

KAMII, Constance; HOUSMAN, Leslie Baker. *Crianças pequenas reinventam a aritmética*. 2. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2002.

KAMII, Constance; JOSEPH, Linda Leslie. *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética*. Porto Alegre: ArtMed, 2008.

ASSIS, Orly Zucatto Mantovani de. *Proepre*: fundamentos teóricos e prática pedagógica para a educação infantil. São Paulo: Book, 2013.

MORO, Maria Lucia Faria. Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v. 17, n. 2, p. 251-266, 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/prc/v17n2/22477.pdf. Acesso em: 27 jan. 2021.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. *Classificação, seriação e contagem no ensino do número*: um estudo de epistemologia genética. Marília: Oficina Universitária Unesp, 2007.

NUNES, Terezinha *et al*. *Introdução à educação matemática*: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem Editora, 2001.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender*. Tradução: Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Edusp, 1978.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. *A gênese do número na criança*. Tradução: Christiano Monteiro Oiticica. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

SILVA, Sonia Bessa da Costa Nicacio. *Relação entre desenvolvimento cognitivo, psicogenese do conhecimento aritmetico de multiplicação e desempenho escolar*. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas,

Campinas, 2003. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253616. Acesso em: 24 mar. 2021.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, [*s. l.*], v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

ZAIA, Lia Leme. Estruturas operatórias concretas: os agrupamentos. *In*: MANTOVANI DE ASSIS, Orly Zucatto (org.). *PROEPRE*: fundamentos teóricos para o ensino fundamental. 2. ed. Campinas: Book Editora, 2013. p. 187-191.

Recebido em: 11 abril 2021
Aceite em: 28 agosto 2021