ISSN: 0101-3742

AJUSTE EMPÍRICO DA CURVA DE CALIBRAÇÃO DO TERMOPAR CHROMEL-ALUMEL ATRAVÉS DE CALCULADORAS PROGRAMÁVEIS

KLEMENSAS RIMGAUDAS JURAITIS*

RESUMO

Uma regressão polonomial pode ser utilizada com precisão, utilizando-se certas calculadoras programáveis. No presente trabalho apresenta-se, da maneira didática, um programa de regressão polinomial, usando-se uma calculadora programável Texas TI-59, exemplificando-se o método através do ajuste de uma curva de calibração de um termopar Chromel-Alumel na faixa de temperatura de 0 a 1200 graus centígrados.

1 – INTRODUÇÃO

As recentes descobertas no campo dos microprocessadores permitem simplificar, acelerar e minimizar os custos na obtenção e tratamento de dados. Muitos programas que só podiam ser realizados através de computadores, são hoje realizados de uma forma econômica através de microprocessadores. O presente trabalho serve para ilustrar esta nova realidade.

O propósito do nosso trabalho é substituir uma tabela de temperaturas por um polinômio ajustado empiricamente. Como sabemos, a temperatura de uma dada amostra pode ser medida através de um termopar[3], com boa precisão, numa ampla faixa de temperaturas. Efetuando-se uma leitura direta da força eletromotriz, através de um circuito potenciométrico e usando uma tabela de conversão para temperaturas, obtemos a temperatura desejada. Usando-se a forma polinomial, simplifica-se o tratamento de dados, pois elimina-se o erro da conversão gráfica, ou então o tempo necessário caso fosse feita uma interpolação.

Gande parte das calculadoras programáveis, tais como Texas TI-59 ou Hewlett Packard HP-41C/HP-41CV, possuem módulos pré-programados ROM, nos quais existem programas para a regressão linear[6], bem como para a regressão linear múltipla[4]. Segundo a literatura[1, 2] as regressões polinomiais são feitas para um grau específico do polinômio. No presente trabalho apresentamos um algorítmo para o cálculo da regressão polinomial, para um polinômio de grau N qualquer, onde a única limitação é a quantidade de registros disponíveis na calculadora para a armazenagem dos dados.

Vamos exemplificar o nosso método, através do ajuste de uma curva de calibração do termopar CHROMEL-ALUMEL na faixa de temperaturas de 0^{o} à 1200^{o}C. Deve-se ressaltar que, através desse método, pode-se ajustar quaisquer curvas de calibração de termopares.

Para ajustar um polinômio de grau N a um conjunto de dados, através da regressão polinômial, deve-se chegar a um sistema de equações lineares com (N + 1) equações e (N + 1) incógnitas. Assim sendo o limite do grau do polinômio a ser ajustado está na capacidade da calculadora resolver endogenamente o sistema de equações lineares. Para a Texas TI-59 o limite é de 8 equações com 8 incógnitas e portanto o grau máximo do polinômio é este. Para a HP-41C o limite é de 14 equações com 14 incógnitas e portanto o polinômio a ser resolvido é de décimo terceiro grau. Tendo-se em vista que a calculadora TI-59 dispõe de 100 registros de armazenagem de dados, além dos 160 passos de programação, pode-se, dentro dessa limitação de memória, ajustar-se um polinômio de sétimo grau.

2 – ALGORÍTIMO PARA A REGRESSÃO POLINOMIAL

Vamos definir um polinômio datravés da sua equação canônica:

$$P_N(X) = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + ... + A_N X^N ; A_N \neq 0$$

onde, N é o grau do polinômio, X a sua variável independente e $A_0, ... A_N$ os seus parâmetros. Podemos escrever essa expressão numa forma mais operacional:

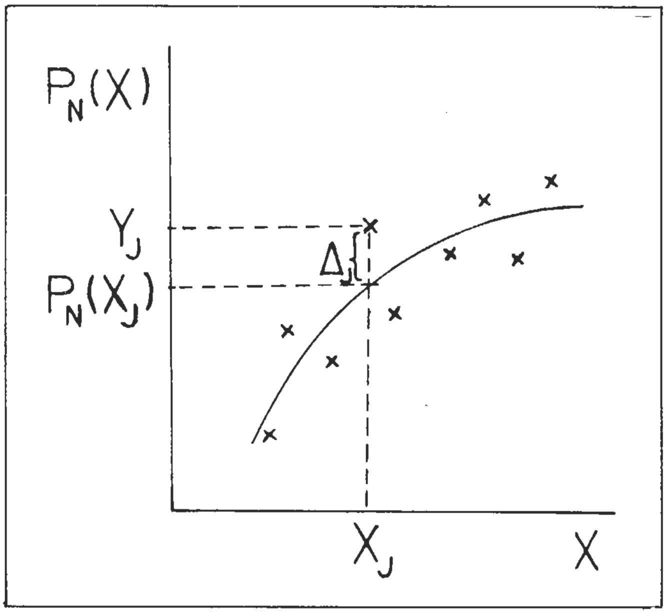
$$P_N(X) = \sum_{I=0}^{N} A_I X^I \quad ; A_N \neq 0 \quad (1)$$

A função poinômio é uma função contínua, monótona e diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

O método dos mínimos quadrados permite ajustar qualquer polinômio de grau N a um conjunto de pontos obtidos experimentalmente (X_J, Y_J). No desenho esquemático (Fig. 1) podemos ver os pontos experimentais e a linha polinomial ajustada a esses pontos. Para cada par de valores experimentais (X_J, Y_J) podemos encontrar um desvio da linha polinomial ajustada. Esse desvio é dado por:

$$\Delta_J = Y_J - P_N(X_J)$$

* Professor Assistente do Departamento de Física – CCE-UEL.



Como esta diferença pode tomar tanto valores positivos quanto negativos, e nos interessa o desvio absoluto, então tomaremos o quadrado do desvio somado para todos os valores experimentais:

$$S = \sum_J \Delta_J^{\,2}$$

$$= \sum_J [Y_J - P_N(X_J)]^2$$

$$= \sum_J [\, Y_J - \sum_{I=0}^{N} A_I (X_J)^I \,]^2$$

Como os valores de X_J e Y_J são valores conhecidos, então as incógnitas nessa expressão são parâmetros do polinômio A_I, (I= 0,1,2,...N) Assim podemos escrever uma nova função:

$$S(A_0, A_1, \ldots, A_N) = \sum_J [Y_J - \sum_{I=0}^{N} A_I (X_J)^I \,]^2 \qquad (2)$$

O melhor ajuste do polinômio é conseguido quando a soma dos seus desvios absolutos é mínima, ou seja quando a função S apresenta um mínimo. Logo as condições de mínimo são as seguintes:

$$\frac{\partial S}{\partial A_0} = \frac{\partial S}{\partial A_1} = \ldots = \frac{\partial S}{\partial A_N} = 0$$

ou, na forma condensada

$$\frac{\partial S}{\partial A_K} = 0 \text{ para } K = 0, 1, 2, \ldots N \qquad (3)$$

Vamos então efetuar a derivada da função S em relação à um parâmetro genérico A_K, ou seja:

$$\frac{\partial S}{\partial A_K} = \sum_J 2\,[\, Y_J - \sum_{I=0}^{N} A_I (X_J)^I]\,(-1)(X_J)^K =$$

$$= (-2)[\sum_J Y_J X_J^K - \sum_{I=0}^{N} A_I \sum_J X_J^{I+K}]$$

e, impondo a condição de mínimo (3), obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\sum_{I=0}^{N} A_I \sum_J X_J^{I+K} = \sum_J Y_J X_J^K \qquad ;K=0,1,2,\ldots,N \quad (4)$$

Passando da forma operacional para a forma canônica, podemos escrever o sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$A_0 \sum_J I + A_1 \sum_J X_J + A_2 \sum_J X_J^2 + \ldots + A_N \sum_J X_J^N = \sum_J Y_J$$

$$A_0 \sum_J X_J + A_1 \sum_J X_J^2 + A_2 \sum_J X_J^3 + \ldots + A_N \sum_J X_J^{N+1} = \sum_J Y_J X_J$$

$$A_0 \sum_J X_J^N + A_1 \sum_J X_J^{N+1} + A_2 \sum_J X_J^{N+2} + \ldots + A_N \sum_J X_J^{2N} = \sum_J Y_J X_J^N$$

Logo, o problema é resolver esse sistema de equações lineares de (N+1) equações com (N+1) incógnitas.

3 – CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROGRAMA

O programa de regressão polinomial foi resolvido usando-se o logaritmo da expressão[4]. A calculadora utilizada foi a Texas TI-59, cuja lógica utilizada é AOS (Algebric Operation System). Para facilitar a entrada do programa utilizou-se um cartão magnético, cujos lados foram introduzidos sequencialmente, obedecendo a seguinte ordem:

(1) O primeiro lado do cartão magnético contém os programas vinculados às teclas localizadoras especiais A, B e C, que correspondem às entradas do grau do polinômio N em A, entrada da variável independente X_J em B e da variável dependente Y_J em C.
Os programas correspondentes a essas teclas armazenam os valores de

$$\sum_J X_J^{I+K}$$

nos registros de R_{15} à $R_{[15 + (N+1)^2 - 1]}$, e os valores

$$\sum_J Y_J X_J^K$$

nos registros de $R_{[15 + (N+1)^2]}$ à $R_{[15 + (N+1)^2 + N]}$.

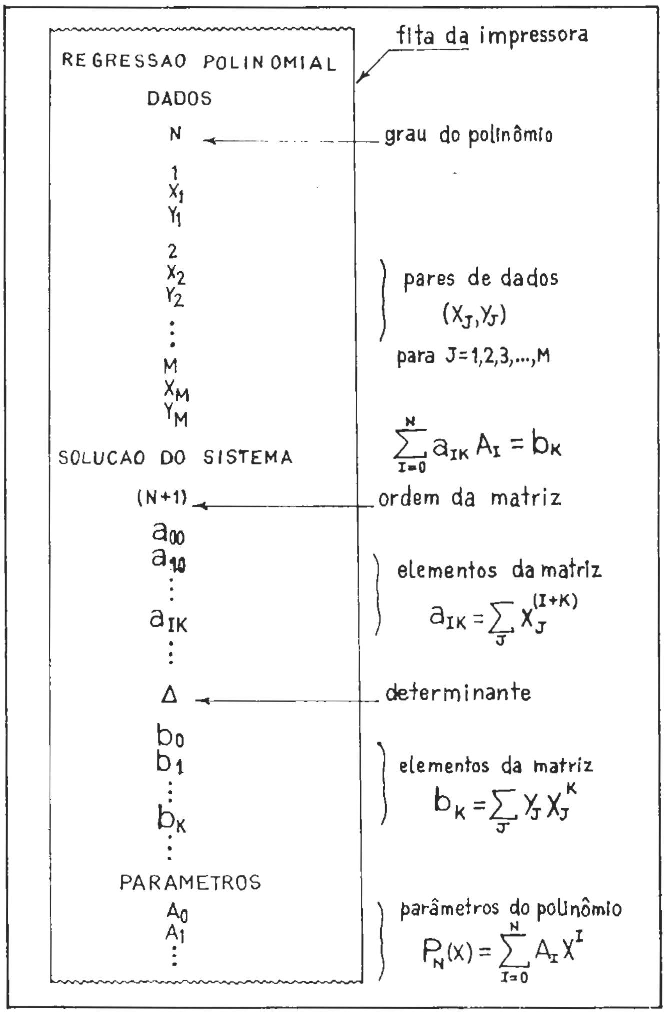
Para facilitar a saída dos dados utilizamos uma impressora alfanumérica PC-100/C, onde para os comentários alfanuméricos podemos armazenar dados nos registros de R_{90} à R_{99}, usando o cartão magnético. O conteúdo desses registros se encontra especificado na Figura 2.

VALORES NUMÉRICOS ARMAZENADOS NOS REGISTROS					
cartão magnético - lado 1			cartão magnético - lado 2		
REGISTRO	VALOR NUMÉRICO	SIGNIFICADO ALFANUMÉRICO	REGISTRO	VALOR NUMÉRICO	SIGNIFICADO ALFANUMÉRICO
R_{90}			R_{90}		
R_{91}			R_{91}	1737353236.	ETROS
R_{92}			R_{92}	3313351330.	PARAM
R_{93}			R_{93}	1730130000.	EMAbb
R_{94}	3236000000.	OSbbb	R_{94}	36243637.	bSIST
R_{95}	161316.	bbDAD	R_{95}	1332001632.	AObDO
R_{96}	3230241327.	OMIAL	R_{96}	3632274115.	SOLUC
R_{97}	3332272431.	POLIN	R_{97}		
R_{98}	3636133200.	SSAOb	R_{98}		
R_{99}	3517223517.	REGRE	R_{99}		

Semina, 3 (10): 117-122, 1982

(2) O segundo lado do cartão magnético contém os programas vinculados à tecla localizadora especial D, que permite a solução do sistema de equações lineares[4] e apresenta o determinante da matriz os valores da matriz e os valores dos parâmetros do polinômio.

A discriminação dos valores que aparecem impressos na fita térmica estão explicados na Figura 3.



Antes de passar o cartão magnético para a leitura do programa, devemos dividir a memória da calculadora de forma adequada, de modo que possa receber os dados na sua capacidade máxima. Usando o comando:

10 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Op}}$ 17

Aparece no mostrador o valor numérico 159.99, o que significa que a memória foi dividida em 100 registros de armazenagem de dados e 160 passos de programação.
O cartão de referência que especifica o conteúdo das teclas localizadoras especiais, serve como guia dos comandos e se apresenta da seguinte forma:

REGRESSÃO POLINOMIAL (159.99)				
N	X_J	Y_J	SOLUÇÃO	

De acordo com o cartão de referência, primeiro introduzimos pela tecla A, o grau do polinômio pelo qual queremos ajustar os nossos dados. Em seguida introduzimos os respectivos pares de dados X_J e Y_J, através das teclas localizadoras B e C. Para encontrar os valores dos coeficientes do polinômio já ajustado, usamos a tecla D.
A barra dupla no cartão de referência significa que devemos seguir o seguinte esquema para utilizar o programa:

(1) Dividimos a memória.
(2) Passamos o lado 1 do cartão magnético na leitora de cartões.
(3) Introduzimos o grau N do polinômio.
(4) Introduzimos os pares de valores experimentais X_J e Y_J.
(5) Passamos o lado 2 do cartão magnético na leitora de cartões.
(6) Apertamos a tecla D (solução) para a resolução do problema.

Todos os valores introduzidos e resolvidos são impressos automaticamente pela impressora PC-100/C seguindo o esquema da figura 3.

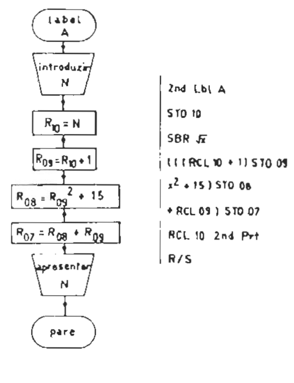
4 – PROGRAMAÇÃO

O programa para o cálculo da regressão polinomial pode ser decomposto em nove unidades de programa, onde três dessas unidades são dedicadas para imprimir comentários alfanuméricos. Os programas que devem ser escritos no cartão magnético devem obedecer a seguinte ordem:

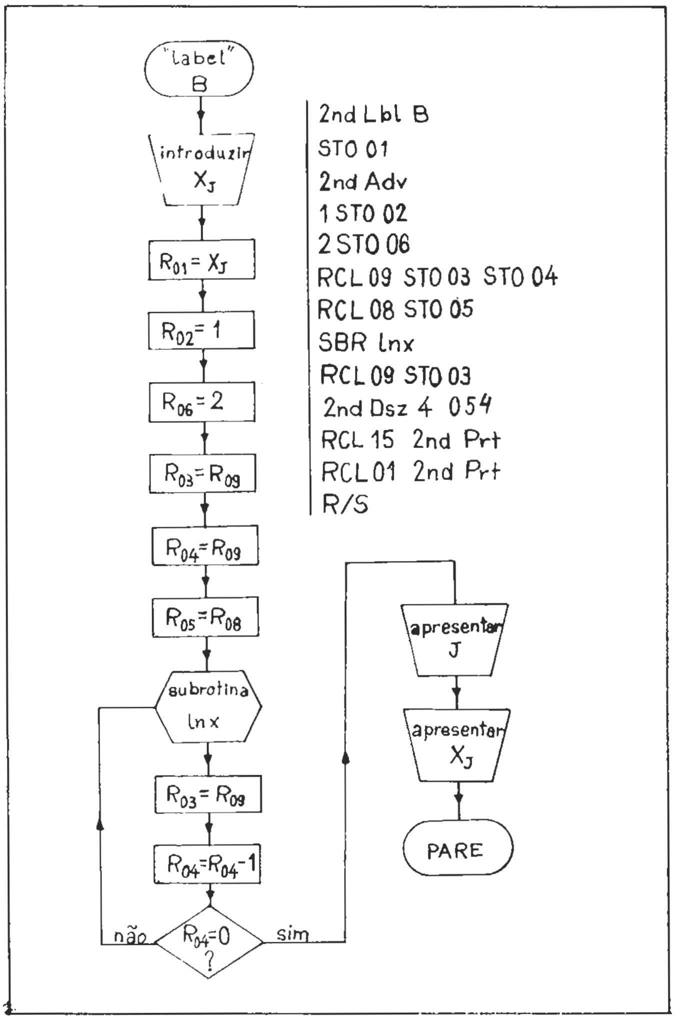
Lado 1
- programa A
- programa B
- programa C
- subprograma lnx
- subprograma $\sqrt{x}$ (alfanumérico)

Lado 2
- programa D
- subprograma y^x
- subprograma x^2 (alfanumérico)
- subprograma 1/x (alfanumérico)

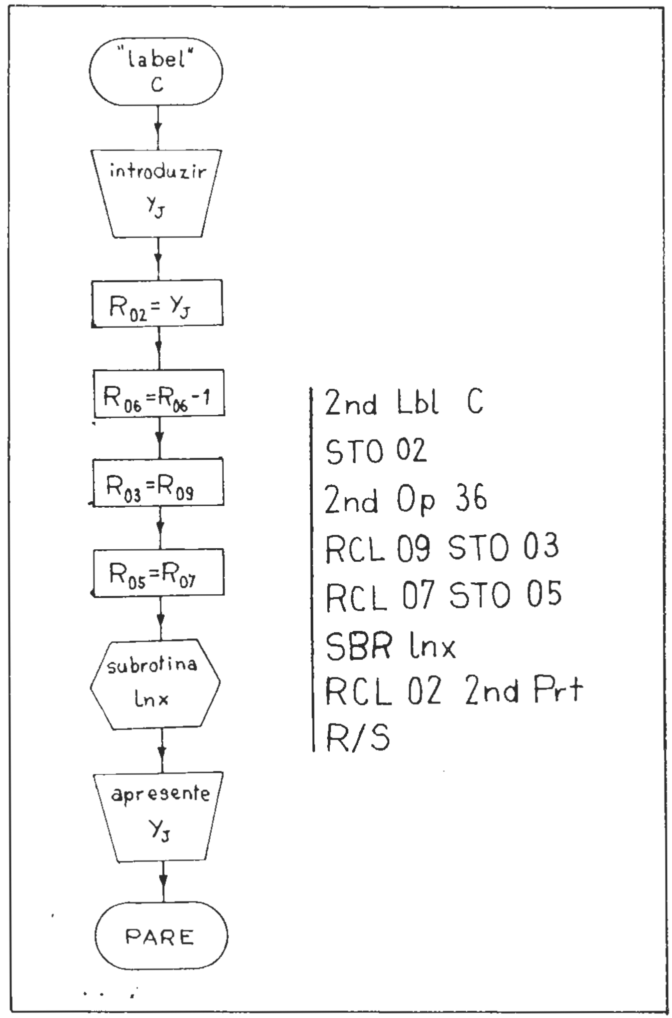
Os subprogramas de comentários alfanuméricos são dispensáveis, mas nós os usamos aqui visto que sobraram posições de programação na memória. Com eles o programa tem aparência mais estética.
Apresentaremos os diagramas de blocos com as respectivas instruções ao seu lado. Seguindo a ordem de ocupação dos passos do programa.
(1) Programa que introduz o grau do polinômio:



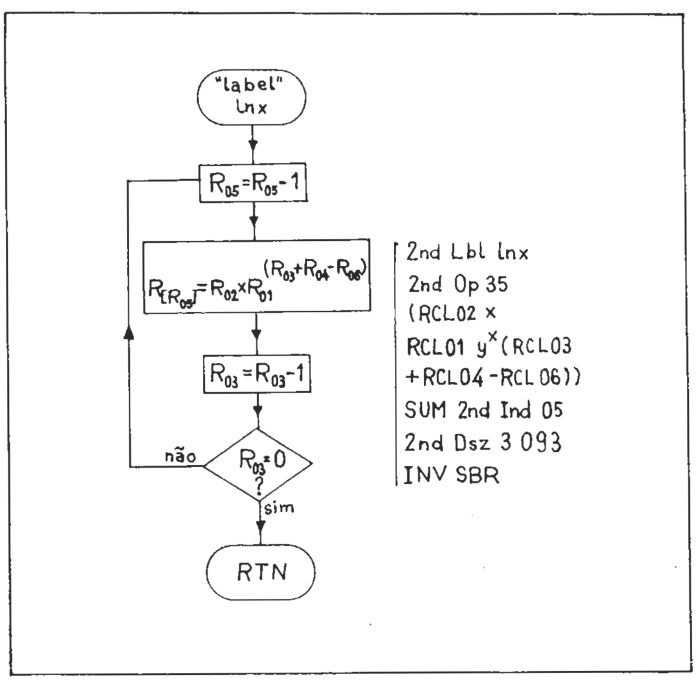
(2) Programa que introduz os valores numéricos de X_J.



(3) Programa que introduz os valores numéricos de Y_J.



(4) Programa que introduz a subrotina lnx, usada repetidamente tanto no programa B quanto no programa C.

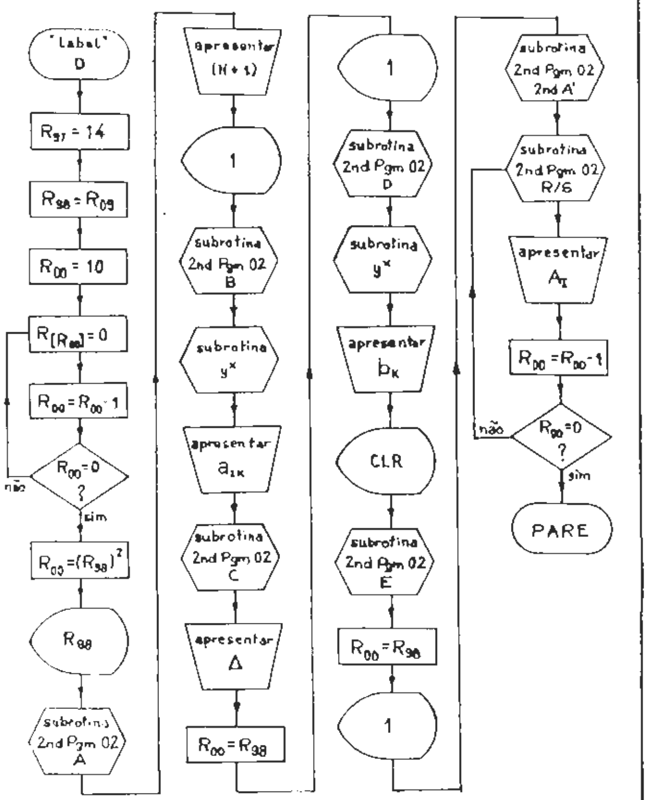


(5) Programa que introduz a subrotina para a impressão alfanumérica dos seguintes comentários:
REGRESSÃO POLINOMIAL e DADOS

```
2nd Lbl √x
RCL 99 2nd Op 01
RCL 98 2nd Op 02
RCL 97 2nd Op 03
RCL 96 2nd Op 04
2nd Op 05
2nd Adv
2nd Op 00
RCL 95 2nd Op 02
RCL 94 2nd Op 03
2nd Op 05
2nd Adv
INV SBR
```

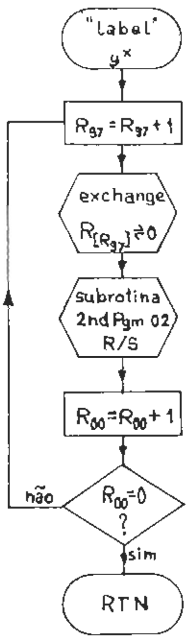
Agora, vamos apresentar os programas que são gravados no segundo lado do cartão magnético:

(6) Programa para a resolução do sistema de equações lineares.




```
2nd Lbl D
SBR x²
14 STO 97
RCL 09 STO 98
10 STO 00
CLR
STO 2nd Ind 00
2nd Dsz 0 016
RCL 98 x² STO 00
RCL 98 2nd Pgm 02 A
1 2nd Pgm 02 B
SBR y^x
2nd Pgm 02 C
RCL 98 STO 00
1 2nd Pgm 02 D
SBR y^x
CLR
2nd Pgm 02 E
RCL 98 STO 00
SBR 1/x
1 2nd Pgm 02 2nd A'
2nd Pgm 02 R/S
2nd Dsz 0 066
R/S
```

(7) Programa que introduz a subrotina y^x usada repetidamente no programa D.




```
2nd Lbl y^x
(RCL 97 + 1) STO 97
CLR
2nd Exc 2nd Ind 97
2nd Pgm 02 R/S
2nd Dsz 0 076
INV SBR
```

(8) Programa que introduz a subrotina para a impressão alfanumérica do seguinte comentário: SOLUÇÃO DO SISTEMA

```
2nd Lbl x²
2nd Adv
RCL 96 2nd Op 01
RCL 95 2nd Op 02
RCL 94 2nd Op 03
RCL 93 2nd Op 04
2nd Op 05
2nd Adv
INV SBR
```

(9) Programa que introduz a subrotina 1/x para a impressão alfanumérica do seguinte comentário: PARÂMETROS

```
2nd Lbl 1/x
2nd Adv
2nd Op 00
RCL 92 2nd Op 02
RCL 91 2nd Op 03
2nd Op 05
INV SBR
```

Quando não se dispõe da impressora alfanumérica, o programa deve suprimir as subrotinas $\sqrt{x}$, x^2 e $1/x$. Também deve-se substituir os seguintes comandos do programa por:

SBR $\sqrt{x}$ → 2nd Nop 2nd Nop

SBR x^2 → 2nd Nop 2nd Nop

SBR 1/x → 2nd Nop 2nd Nop

2nd Prt → R/S

Desta maneira a saída dos dados será obtida pelo visor, sem alterar em nada os outros comandos.

5 – AJUSTE DA CURVA DE CALIBRAÇÃO DO TERMOPAR CHROMEL-ALUMEL

Para ajustar a curva de calibração, não é necessário usar todos os pontos da tabela. Usando apenas os que constam da tabela 1 conseguimos os outros pontos com a mesma precisão da tabela toda.

TABELA 1 – Temperatura X FEM para o Termopar CHROMEL-ALUMEL junção de referência à 0^oC.

T (^oC)	FEM (mV)
0	0,00
50	2,02
100	4,10
150	6,13
200	8,13
250	10,16
300	12,21
350	14,29
400	16,40
450	18,50
500	20,65
550	22,78
600	24,91
650	27,03
700	29,14
750	31,23
800	33,30
850	35,34
900	37,36
950	39,35
1000	41,31
1050	43,25
1100	46,16
1150	47,04
1200	48,89

Ajustando os dados para um polinômio do quarto grau obtemos os seguintes parâmetros:

$A_0 = -0.2069261168$

$A_1 = 25.98024255$

$A_2 = -0.7832574688$

$A_3 = 0.1257223458$

$A_4 = -0.0061232065$

Usando o programa dos polinômios, que consta no módulo "Biblioteca Geral"(5) podemos obter qualquer temperatura, introduzindo o valor correspondente da força eletromotriz gerada pelo termopar.

ABSTRACT

Computation of polynomial regression with precision is possible with some programmable calculators. In this paper, a program of a polynomial regression, using a Texas TI-59 pocket calculator, is presented in a didactic manner. The method is exemplified by means of fitting data of a curve of calibration for Chromel-Alumel thermocouple in the temperature range between 0º C and 1.200º C.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. SANTOS, J.A.R. *Mini-calculadoras eletrônicas:* sua aplicação correta e eficiente nas Ciências Exatas. São Paulo, Edgard Blücher, 1977. p. 211-14.

2. SANTOS, J.A.R. & STRAVINSKI, V.M. *Processamento de dados:* uma introdução usando mini-calculadoras. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; São Paulo, EDUSP, 1980. p. 36-96.

3. SUBBARAD, E.C.; CHAKRAVORTY, D.; MERRIAM, M.F.; RAGHAVAM, V.; SINGHAL, L.K. *Experiências de ciência dos materiais.* São Paulo, Edgard Blücher, 1973. p. 188-93.

4. TI Programable 58/59: applied statistics. s.l.p., Texas Instruments, 1977. p.5-16.

5. TI Programável 58/59: biblioteca geral. s.l.p., Texas Instrumentos Eletrônicos, 1977. p. 9-13.

6. TI Programável 58/59: programação instrumento de eficiência pessoal. s.l.p., Texas Instrumentos Eletrônicos, 1977. p. V-36-40.

(8) Programa que introduz a subrotina para a impressão alfanumérica do seguinte comentário: SOLUÇÃO DO SISTEMA

```
2nd Lbl x²
2nd Adv
RCL 96 2nd Op 01
RCL 95 2nd Op 02
RCL 94 2nd Op 03
RCL 93 2nd Op 04
2nd Op 05
2nd Adv
INV SBR
```

(9) Programa que introduz a subrotina 1/x para a impressão alfanumérica do seguinte comentário: PARÂMETROS

```
2nd Lbl 1/x
2nd Adv
2nd Op 00
RCL 92 2nd Op 02
RCL 91 2nd Op 03
2nd Op 05
INV SBR
```

Quando não se dispõe da impressora alfanumérica, o programa deve suprimir as subrotinas $\sqrt{x}$, x^2 e $1/x$. Também deve-se substituir os seguintes comandos do programa por:

SBR $\sqrt{x}$ → 2nd Nop 2nd Nop

SBR x^2 → 2nd Nop 2nd Nop

SBR 1/x → 2nd Nop 2nd Nop

2nd Prt → R/S

Desta maneira a saída dos dados será obtida pelo visor, sem alterar em nada os outros comandos.

5 – AJUSTE DA CURVA DE CALIBRAÇÃO DO TERMOPAR CHROMEL-ALUMEL

Para ajustar a curva de calibração, não é necessário usar todos os pontos da tabela. Usando apenas os que constam da tabela 1 conseguimos os outros pontos com a mesma precisão da tabela toda.

TABELA 1 – Temperatura X FEM para o Termopar CHROMEL-ALUMEL junção de referência à 0^oC.

T (^oC)	FEM (mV)
0	0,00
50	2,02
100	4,10
150	6,13
200	8,13
250	10,16
300	12,21
350	14,29
400	16,40
450	18,50
500	20,65
550	22,78
600	24,91
650	27,03
700	29,14
750	31,23
800	33,30
850	35,34
900	37,36
950	39,35
1000	41,31
1050	43,25
1100	46,16
1150	47,04
1200	48,89

Ajustando os dados para um polinômio do quarto grau obtemos os seguintes parâmetros:

$A_0 = -0.2069261168$

$A_1 = 25.98024255$

$A_2 = -0.7832574688$

$A_3 = 0.1257223458$

$A_4 = -0.0061232065$

Usando o programa dos polinômios, que consta no módulo "Biblioteca Geral"(5) podemos obter qualquer temperatura, introduzindo o valor correspondente da força eletromotriz gerada pelo termopar.

ABSTRACT

Computation of polynomial regression with precision is possible with some programmable calculators. In this paper, a program of a polynomial regression, using a Texas TI-59 pocket calculator, is presented in a didactic manner. The method is exemplified by means of fitting data of a curve of calibration for Chromel-Alumel thermocouple in the temperature range between 0º C and 1.200º C.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. SANTOS, J.A.R. *Mini-calculadoras eletrônicas:* sua aplicação correta e eficiente nas Ciências Exatas. São Paulo, Edgard Blücher, 1977. p. 211-14.
2. SANTOS, J.A.R. & STRAVINSKI, V.M. *Processamento de dados:* uma introdução usando mini-calculadoras. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; São Paulo, EDUSP, 1980. p. 36-96.
3. SUBBARAD, E.C.; CHAKRAVORTY, D.; MERRIAM, M.F.; RAGHAVAM, V.; SINGHAL, L.K. *Experiências de ciência dos materiais.* São Paulo, Edgard Blücher, 1973. p. 188-93.
4. TI Programable 58/59: applied statistics. s.l.p., Texas Instruments, 1977. p.5-16.
5. TI Programável 58/59: biblioteca geral. s.l.p., Texas Instrumentos Eletrônicos, 1977. p. 9-13.
6. TI Programável 58/59: programação instrumento de eficiência pessoal. s.l.p., Texas Instrumentos Eletrônicos, 1977. p. V-36-40.