Os Valores Médios de uma Função Subarmônica

GIRJA SHANKER SRIVASTAVA
Doutor (PhD) em Matemática

RESUMO

Seja u(z) uma função subarmônica no plano inteiro. Os valores médios de u(z) são definidos como

$$L(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r e^{i\theta})\, d\theta \quad , e$$

$$A_\delta(r) = \frac{\delta+1}{2\pi r^{\delta+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^r u(x e^{i\theta})\, x^\delta \, dx\, d\theta$$

Seja a ordem de u(z) ρ e a ordem inferior λ. Além disso, seja $\mu^*(r)$ a medida positiva associada com u(z). Os resultados mais importantes são

Teorema 1: Seja $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\mu^*(r)}{r^\rho} = C(D)$, quando $0 < \rho < \infty$,

e $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{(L(r) - A_\delta(r))}{\mu^*(r)} = P(Q)$.

Então

$$\frac{(D/C)}{(\rho+\delta+1)} \leq Q \leq P \leq \frac{1}{(\delta+1)} \left(1 - \frac{\rho\,(D/C)^{(\delta+1)/\rho}}{(\delta+1)}\right).$$

Teorema 2. $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log L(r)}{\log r} = \rho(\lambda)$.

Teorema 3. $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log A_\delta(r)}{\log r} = \rho(\lambda)$.

Os resultados dados acima têm aplicações em teoria de funções inteiras de uma variável complexa z.

ABSTRACT

Let u(z) be a subharmonic function in the entire complex plane and let $M(r) = \max_{|z|=r} (u(z))$. Then the order ρ and lower order λ of u(z) are defined as

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \rho$$

and

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \lambda .$$

The mean values of u(z) are defined as follows:

$$L(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r e^{i\theta})\, d\theta \ ,$$

and

$$A_\delta(r) = \frac{\delta+1}{2\pi r^{\delta+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^r u(x e^{i\theta})\, x^\delta\, dx\, d\theta .$$

Let $\mu^*(r)$ be the unique measure associated with the function u(z). The results obtained in this paper give the growth of these mean values. The more important results are given below.

Theorem 1. Let $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\mu^*(r)}{r^\rho} = C(D)$, $0 < \rho < \infty$,

and $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} = P(Q)$.

Then $\frac{(D/C)}{(\rho+\delta+1)} \leq Q \leq P \leq \left(1 - \frac{\rho\,(D/C)^{(\delta+1)/\rho}}{(\delta+1)}\right)$

Theorem 2. $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log L(r)}{\log r} = \rho(\lambda)$.

Theorem 3. $\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log A_\delta(r)}{\log r} = \rho(\lambda)$.

The results obtained have applications in the theory of entire functions.

1. Seja u(z) uma função subarmônica definida no plano inteiro. Para a definição e propriedades das funções subarmônicas, nós referiremos ao Rado [3] ou Riesz [4]. Seja μ a única medida (Veja [4]) associada com u(z), definida para todos os conjuntos limitados de Borel no plano. Definimos

$$\mu^*(t) = \mu(|\xi|) < t)$$

e

$$M(r) = \max_{|z| \leq r} [u(z)] .$$

A ordem ρ e a ordem inferior λ de u(z) são definidas como (Veja [2])

$$\limsup_{r\to\infty}(\inf) \frac{\log M(r)}{\log r} = \rho(\lambda) \ , \ 0 \leq \lambda \leq \rho \leq \infty . \tag{1.1}$$

Quando $0 < \rho < \infty$, definimos

$$\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\mu^*(r)}{r^\rho} = C(D) \tag{1.2}$$

Os valores médios de u(z) são definidos por

$$L(u,r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r e^{i\theta})\, d\theta \ , \tag{1.3}$$

e

$$A_\delta(u,r) = \frac{\delta+1}{2\pi r^{\delta+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^r u(x e^{i\theta})\, x^\delta\, dx\, d\theta \ , \tag{1.4}$$

$$= \frac{\delta+1}{r^{\delta+1}} \int_0^r L(u,x)\, x^\delta\, dx \ ,$$

para $r > 0$ e $\delta \geq 0$.

É sabido (Veja [3], p. 5-8) que L(u, r) e $A_\delta(u, r)$ são funções crescentes e convexas de log r. Neste trabalho, estudariamos mais algumas propriedades das L(u, r) e $A_\delta(u, r)$ e crescimentos delas nas relação da função M(r). Como nós vamos usar somente uma função u (z), escrevemos L (r) e A_δ (r) em vez de L (u, r) e A_δ (u, r), respectivamente. Suponhamos que u (z) é harmônica numa vizinhança de z = 0 e, portanto, $\mu^*(0) = 0$. Além disso, seja u (0) = 0.

2. Provaremos agora

Teorema 1. Seja

$$\limsup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} = P\,(Q).$$

Então

(2.1)

$$\frac{D}{C}\left(\frac{1}{\rho+\delta+1}\right) \leqslant Q \leqslant P \leqslant \frac{1}{(\delta+1)}\left(1 - \frac{\rho}{(\rho+\delta+1)}\left(\frac{D}{C}\right)^{(\delta+1)/\rho}\right)$$

Demonstração: Sejam $D > 0$ e $C < \infty$. As desigualdades em (2.1) valem obviamente, se $D = 0$ ou $C = \infty$. Para $\epsilon > 0$ e $k > 1$, temos, de (1.2),

(2.2) $\mu^*(r) < (C+\epsilon)\, r^\rho$, e

(2.3) $\mu^*(kr) > (D-\epsilon)\,(kr)^\rho$, para todo $r > r_0(\epsilon)$.

A seguinte relação chamada fórmula de Poisson - Jensen, foi mostrada por Hayman [1]:

(2.4) $$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\; u(R\,e^{i\phi})}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi - \int_{|\xi| < R} \log\left|\frac{R^2 - \bar{z}\,\xi}{R(z-\xi)}\right| d\mu\,(e_\xi),$$

sendo $z = r\,e^{i\theta}$ e $0 \leqslant r < R$. Pondo $z = 0$ em (2.4) e fazendo a integração por partes, conseguimos a fórmula de Jensen para as funções subarmônicas, isto é,

(2.5) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\,e^{i\theta})\, d\theta = u(0) + \int_0^R \frac{\mu^*(t)}{t}\, dt.$$

Usando o fato de que $u(0) = 0$ e as equações (1.5) e (2.5), temos

$$\frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} = \frac{1}{\mu^*(r)}\left(L(r) - \frac{\delta+1}{r^{\delta+1}}\int_0^r L(x)\, x^\delta\, dx\right).$$

Integrando por partes na expressão ao lado direito, resulta

$$\frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} = \frac{1}{\mu^*(r)\, r^{\delta+1}}\int_0^r \mu^*(x)\, x^\delta\, dx.$$

Ou, para $k > 1$,

(2.6) $$\frac{L(kr) - A_\delta(kr)}{\mu^*(kr)} = o(1) + \frac{1}{\mu^*(kr)(kr)^{\delta+1}}\int_{r_0}^r \mu^*(x)\, x^\delta\, dx + \frac{1}{\mu^*(kr)(kr)^{\delta+1}}\int_r^{kr} \mu^*(x)\, x^\delta\, dx.$$

Como $\mu^*(r)$ é uma função não-decrescente de r, usando (2.2), temos

$$\frac{L(kr) - A_\delta(kr)}{\mu^*(kr)} < o(1) + \frac{(C+\epsilon)\, r^{(\rho+\delta+1)}}{(\rho+\delta+1)\,\mu^*(kr)\,(kr)^{(\delta+1)}} + \frac{\mu^*(kr)\; r^{(\delta+1)}\,(k^{\delta+1} - 1)}{(\delta+1)\,\mu^*(kr)\,(kr)^{\delta+1}}$$

para $r > r_0$. Tomando limites, nós temos

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} \leqslant \frac{C}{D(\rho+\delta+1)\, k^{(\rho+\delta+1)}} + \frac{1}{(\delta+1)}\left(1 - k^{-(\delta+1)}\right)$$

É fácil ver que a expressão ao lado direito é mí nima, quando $k = (C/D)^{1/\rho}$. Substituindo este valor de k, temos

(2.7) $$P \leqslant \frac{1}{(\delta+1)}\left\{1 - \frac{\rho}{(\rho+\delta+1)}\left(\frac{D}{C}\right)^{(\delta+1)/\rho}\right\}$$

De (2.3) e (2.6), temos

$$\frac{L(kr) - A_\delta(kr)}{\mu^*(kr)} > o(1) + \frac{(D-\epsilon)\; r^{(\delta+\rho+1)}}{(\rho+\delta+1)\;\mu^*(kr)\,(kr)^{\delta+1}} + \frac{\mu^*(r)\; r^{(\delta+1)}\,(k^{\delta+1} - 1)}{(\delta+1)\,\mu^*(kr)\,(kr)^{\delta+1}},$$

para todos os valores de r suficientemente grandes. Passando aos limites, temos,

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{L(r) - A_\delta(r)}{\mu^*(r)} \geqslant \frac{D}{C(\rho+\delta+1)\, k^{(\rho+\delta+1)}} + \frac{D}{C(\delta+1)}\left(\frac{1 - k^{-(\delta+1)}}{k}\right).$$

O valor máximo de expressão ao lado direito é realizado para k = 1. Logo, temos

(2.8) $$Q \geqslant \frac{D}{C(\rho+\delta+1)}$$

Combinando as desigualdades (2.7) e (2.8), nós temos (2.1). Isto completa a demonstração do Teorema 1.

A seguir, obtemos as fórmulas de ordem e de ordem inferior, nos termos das funções $L(r)$ e $A_\delta(r)$.

Teorema 2. Para a função $L(r)$ definida por (1.3), temos

(2.9) $$\limsup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{\log L(r)}{\log r} = \rho\,(\lambda).$$

Antes de demonstrarmos o teorema, provaremos o lema seguinte:

Lema: Para $o \leqslant r < R$, nós temos

(2.10) $$L(r) \leqslant M(r) \leqslant \left(\frac{R+r}{R-r}\right) L(R).$$

Demonstração: Segue-se diretamente da definição de $L(r)$, que

$$L(r) \leqslant M(r).$$

Por outro lado, consideremos (2.4). Como

$$R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2 \geqslant (R - r)^2,$$

e $\log\left|\frac{R^2 - \bar{z}\,\xi}{R(z-\xi)}\right| > 0$, para $|\xi| < R$, nós temos que

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r}\, u(R\,e^{i\varphi})\, d\phi.$$

Logo, $$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\, L(R).$$

Agora, nós provaremos o Teorema 2.

Usando a primeira desigualdade em (2.10), nós temos

(2.11) $$\text{Llim}\sup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{\log L(r)}{\log r} \leqslant \limsup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{\log M(r)}{\log r}$$

Substituindo $R = 2r$ em (2.10), temos

$$M(r) \leqslant 3\, L(2r),$$

ou, $$\frac{\log M(r)}{\log r} \leqslant \frac{\log L(2r)}{\log r} + o(1).$$

Ou, passando ao limite,

(2.12) $$\limsup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{\log M(r)}{\log r} \leqslant \limsup_{r\to\infty}\,(\inf)\,\frac{\log L(r)}{\log r}.$$

Combinando (2.11) e (2.12), conseguiremos (2.9).

Isto completa a demonstração do Teorema 2.

Teorema 3. Se $u(z)$ é uma função subarmônica de ordem ρ e ordem inferior λ, então

(2.13) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log A_\delta(r)}{\log r}=\rho(\lambda).$$

Demonstração: Pela definição,

$$A_\delta(r)=\frac{\delta+1}{r^{\delta+1}}\int_0^r L(x)\,x^\delta\,dx.$$

Como $L(r)$ é uma função crescente, temos $A_\delta(r)\leqslant L(r)$. Portanto,

(2.14) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log A_\delta(r)}{\log r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log(L(r)}{\log r}$$

Reciprocamente,

$$A_\delta(2r)=\frac{\delta+1}{(2r)^{\delta+1}}\int_0^{2r}L(x)\,x^\delta\,dx$$

$$>\frac{\delta+1}{(2r)^{\delta+1}}\int_r^{2r}L(x)\,x^\delta\,dx$$

$$>L(r)\left(1-(1/2)^{\delta+1}\right).$$

Logo, $$\frac{\log A_\delta(2r)}{\log 2r}\geqslant\frac{\log L(r)}{\log 2r}+o(1).$$

Ou,

(2.15) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log A_\delta(r)}{\log r}\geqslant\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log L(r)}{\log r}$$

Combinando (2.14) e (2.15) segue-se (2.13), por causa de (2.9).

Finalmente, nós temos o

Teorema 4.

(2.16) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log(L(r)-A_\delta(r))}{\log r}=\rho(\lambda).$$

Demonstração: Seja

(2.17) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log L(r)-A_\delta(r))}{\log r}=A(a).$$

Temos $$A_\delta(r)=\frac{\delta+1}{r^{\delta+1}}\int_0^r L(x)\,x^\delta\,dx.$$

Diferenciando ambos os lados,

$$A'_\delta(r)=\frac{(\delta+1)}{r^{\delta+1}}\left(L(r)\,r^\delta-\frac{\delta+1}{r}\int_0^r L(x)\,x^\delta\,dx\right),$$

ou

(2.18) $$A'_\delta(r)=(\delta+1)\left(\frac{L(r)-A_\delta(r)}{r}\right).$$

A integração entre os limites t_o e t dá,

$$A_\delta(t)=0(1)+(\delta+1)\int_{t_o}^t\frac{L(x)-A_\delta(x)}{x}\,dx.$$

Seja $0<A<\infty$. De (2.17), nós temos para $\epsilon>0$,

$$(L(r)-A_\delta(r))<r^{(A+\epsilon)},\quad r>r_o(\epsilon).$$

Logo, $$A_\delta(t)<0(1)+\frac{(\delta+1)}{(A+\epsilon)}t^{(A+\epsilon)},$$

ou, $$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log A_\delta(r)}{\log r}\leqslant A,$$

ou, $\rho\leqslant A$, que vale evidentemente, quando $A=\infty$.

É fácil ver a partir de (2.18), que $(L(r)-A_\delta(r))$ é uma função crescente de r, pois $A_\delta(r)$ é uma função convexa de log r. Logo,

$$A_\delta(2r)=0(1)+\int_{r_o}^{2r}\frac{L(x)-A_\delta(x)}{x}\,dx$$

$$\geqslant 0(1)+\int_r^{2r}\frac{L(x)-A_\delta(x)}{x}\,dx$$

$$>0(1)+(L(r)-A_\delta(r))\log 2.$$

Pela (2.17), nós temos que

$$(L(r)-A_\delta(r))>r^{(A-\epsilon)}$$

para $r=r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots$ tal que $r_n\to\infty$ quando $n\to\infty$. Logo

$$\log A_\delta(2r)>(A-\epsilon)\log r+o(1),$$

para $r=r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots$, ou

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log A_\delta(r)}{\log r}\geqslant A,$$

ou, $\rho\geqslant A$, que vale, evidentemente, para $A=0$. Logo, nós temos $\rho=A$. Da mesma maneira, podemos provar que $\lambda=a$.

Isto completa a demonstração do Teorema 4.

3. Nós aplicaremos os resultados obtidos na seção anterior à teoria de funções inteiras.

(i) Como $L(r)$ e $A_\delta(r)$ são funções convexas e crescentes de log r, podem ser representadas como

(3.1) $$L(r)=0(1)+\int_{r_o}^r L'(x)\,dx,\quad 0<r_o\leqslant r,\text{ e}$$

(3.2) $$A_\delta(r)=0(1)+\int_{r_o}^r A'_\delta(x)\,dx,\quad 0<r_o\leqslant r.$$

É fácil verificar que

(3.3) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log(r\,L'(r))}{\log r}=\rho(\lambda),\text{ e}$$

(3.4) $$\limsup_{r\to\infty}(\inf)\frac{\log(r\,A'_\delta(r))}{\log r}=\rho(\lambda)$$

(ii) Seja $u(z) = \log |f(z)|$; sendo $f(z)$ uma função inteira, de ordem ρ e ordem inferior λ. Então $u(z)$ é uma função subarmônica de mesma ordem ρ e ordem inferior λ. Além disso, seguindo Hayman [1], nós temos $\mu^*(r) = n(r)$, onde $n(r)$ representa o número de zeros da função $f(z)$, no disco $|z| \leqslant r$. Os valores médios $L(r)$ e $A_\delta(r)$ são reduzidos aos valores médios geométricos da $f(z)$:

$$L(r) = \log G(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| \, d\theta ,$$

$$A_\delta(r) = \log g_\delta(r) = \frac{\delta+1}{2\pi r^{\delta+1}} \int_0^r \int_0^{2\pi} \log |f(x e^{i\theta})| \, x^\delta \, dx \, d\theta .$$

Do Teorema 1, nós temos

$$\frac{(D/C)}{(\rho+\delta+1)} \leqslant \liminf_{r\to\infty} (\sup) \frac{\log(G(r)/g_\delta(r))}{n(r)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\delta+1)} \left(1 - \frac{(D/C)^{(\delta+1)/\rho}}{(\rho+\delta+1)}\right).$$

(III) Do Teorema 2, nós temos

$$\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log\log G(r)}{\log r} = \rho(\lambda).$$

(IV) Do Teorema 3, nós temos

$$\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log\log g_\delta(r)}{\log r} = \rho(\lambda).$$

(V) Do Teorema 4, nós temos

$$\limsup_{r\to\infty} (\inf) \frac{\log\log(G(r)/g_\delta(r))}{\log r} = \rho(\lambda).$$

BIBLIOGRAFIA

HAYMAN, W.K. – "The minimum modulus of large integral functions". *Proc. London Math. Soc.*, 2(3): 469-512, 1952.

HEINS, M. – "Entire functions with bounded minimum modulus: subharmonic functions analogues". *Ann. Math.*, 2:200-13, 1948.

RADO, T. – *Subharmonic functions.* New York, Chelsea, 1949.

RIESZ, F. – "Sur les functions subharmoniques et lur rapport a la theorie du potencial, I & II". *Acta Math.*, *48*: 329-42, 1926; *54*: 321-60, 1930.