ISSN: 0101-3742

RESPOSTA DE ESTRUTURAS LINEARES SUJEITAS A CARREGAMENTO DINÂMICO

VITOR FAUSTINO PEREIRA*

RESUMO

Demonstração do emprego da Transformada de Fourier no cálculo da resposta de estruturas de comportamento linear sujeitas a carregamento dinâmico. O emprego desta técnica é vantajoso quando a resposta é obtida numericamente graças ao algorítmo de Transformada Rápida de Fourier.

1. INTRODUÇÃO

A obtenção da resposta de um sistema linear de um grau de liberdade constitui um dos problemas clássicos da Física-Matemática.

Na figura 1 é dado um corpo de massa m, vinculado a um referencial fixo, através de uma mola de constante k e de um amortecedor de constante c, submetido a uma força, variável com o tempo, p(t).

Os deslocamentos da massa, v(t), em função do tempo, podem ser obtidos resolvendo-se a equação diferencial:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \qquad (1)$$

onde $\dot{v}(t)$ é $\ddot{v}(t)$ são a velocidade e a aceleração no instante t.

Problema análogo a este é o da determinação do histórico dos deslocamentos de uma estrutura linear, idealizada com um grau de liberdade, sujeita a um carregamento p(t), conforme mostra a figura 2.

A resolução destes problemas se dá através de uma equação diferencial idêntica a (1).

A constante m é igual à massa suposta concentrada nas extremidades das barras AB, CD ou EF.

A constante k é dada pela rigidez lateral destas barras.

Em estruturas não é comum se definir uma constante de amortecimento. Ao invés disto trabalha-se com uma porcentagem, ϵ, do amortecimento c em relação ao amortecimento crítico c_c.

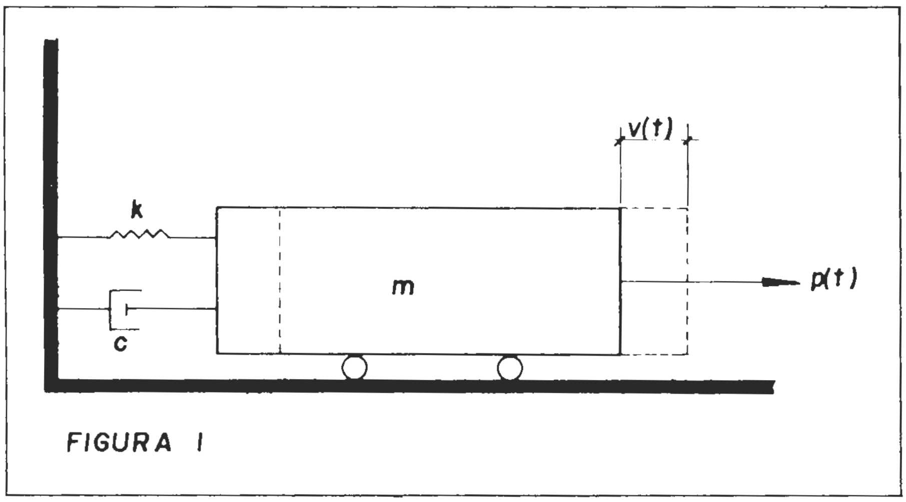


Figura 1 - Sistema mecânico com um grau de liberdade.

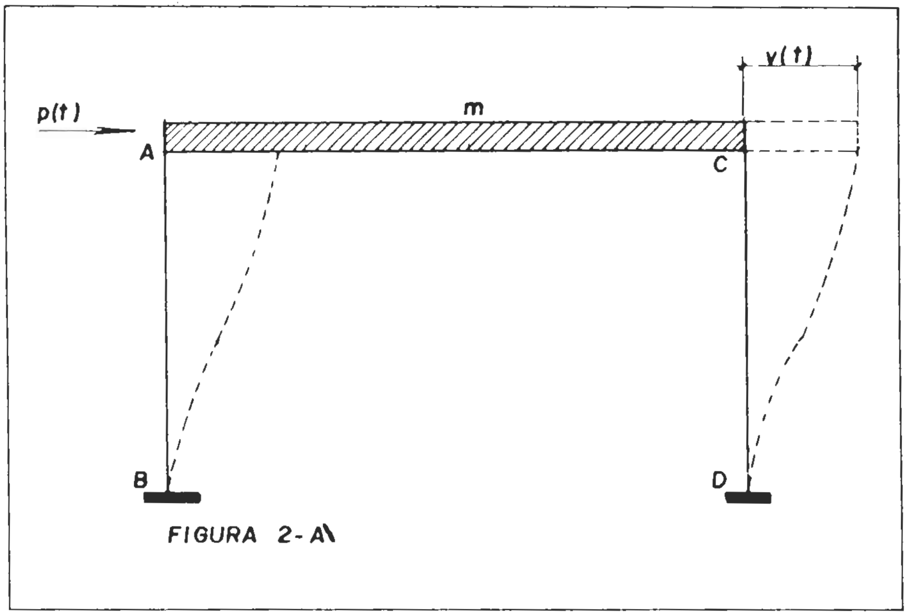
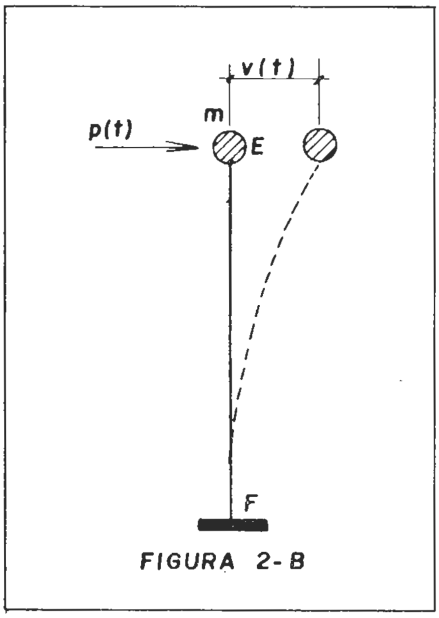


Figura 2 - Exemplos de estruturas com um grau de liberdade.
a) Pórtico com viga de rigidez infinita.

*Engenheiro Civil (FUEL). Mestre em Engenharia de Estruturas (USP). Professor Assistente, Departamento de Engenharia Civil.



b) Barra com massa concentrada.

$$\epsilon = \frac{c}{c_c} \qquad (2)$$

O amortecimento crítico é definido como o valor de c a partir do qual a estrutura não oscilará, se sofrer um deslocamento inicial. O valor do mesmo é dado por:

$$c_c = 2m\omega \qquad (3)$$

onde ω é a frequência natural da estrutura dada por:

$$\omega = \sqrt{k/m} \qquad (4)$$

Fixada uma porcentagem de amortecimento, geralmente entre 5 e 10%, o valor da constante poder ser obtido por:

$$c = 2\epsilon m\omega \qquad (5)$$

Conhecidas as características da estrutura e o carregamento p(t), a equação diferencial (1) fornece os deslocamentos. A partir destes podem ser obtidos os esforços internos e tensões que atuam na estrutura.

No caso de estruturas com vários graus de liberdade, figura (3), ao invés de uma equação diferencial obtém-se um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$[M]\,[\ddot{V}] + [C]\,[\dot{V}] + [K]\,[V] = [P] \qquad (6)$$

As matrizes [M], [C] e [K] são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura respectivamente. [P] é um vetor de cargas nodais e $[\ddot{V}]$, $[\dot{V}]$, [V] são os vetores de acelerações, velocidades, e deslocamentos, respectivamente.

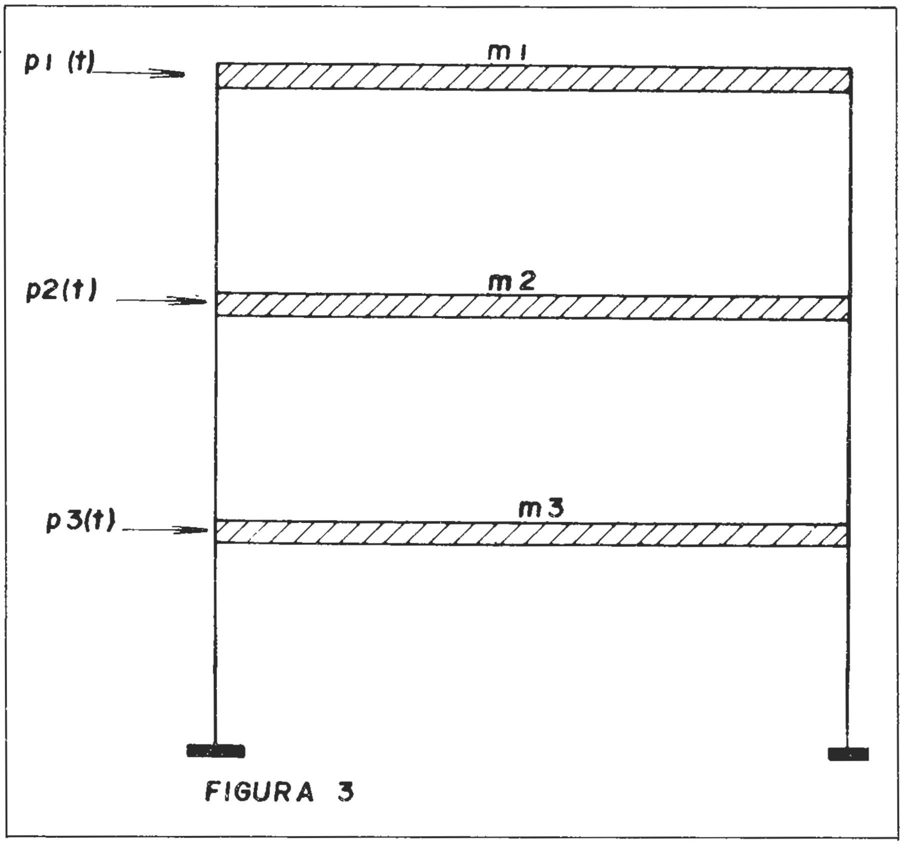


Figura 3 - Exemplo de pórtico de três graus de liberdade.

A expressão (6) fornece um sistema de equações diferenciais acoplado. Em cada linha poderá aparecer os deslocamentos, velocidades e acelerações de mais de um grau de liberdade, impossibilitando a resolução da mesma independentemente das outras.

Neste caso, pode-se aplicar o método da superposição modal que permite transformar um sistema de n equações diferenciais acoplado em n equações do tipo da equação (1).

2. MÉTODO

2.1. Obtenção da Resposta pela Integral de Duhamel

A resolução de um problema de dinâmica das estruturas sempre recai na pesquisa de uma solução para a equação diferencial (1).

Esta solução pode ser encontrada admitindo-se que o carregamento seja constituído por uma série de impulsos, deltas de Dirac, próximos um do outro. A resposta a um desses impulsos constitui uma função h(t) chamada de função de resposta.

Somando-se os efeitos desses impulsos, no limite, teremos:

$$v(t) = \int_0^t p(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau \qquad (7)$$

o que mostra que os deslocamentos podem ser obtidos por uma integral de convolução entre o carregamento e a função de resposta. Essa integral é conhecida como Integral de Duhamel.

A equação (7) mostra que, quando o carregamento é variável com o tempo, o deslocamento em um instante qualquer não dependerá do valor do carregamento naquele instante, mas sim do histórico do carregamento até aquele instante.

A Integral de Duhamel pode ser resolvida numericamente:

$$v(k) = T \sum_{i=0}^{k-1} p(i)\,h(k-i) \qquad (8)$$

Esta é uma das maneiras mais utilizadas para a resolução da equação (1) quando o carregamento é constituído por um sequência discreta.

2.2. Obtenção da Resposta Via Domínio da Frequência

A Transformada de Fourier de uma função x(t), no domínio do tempo, é uma função X(f), no domínio da frequência dada por:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}\,dt \qquad (9)$$

A função x(t) pode ser novamente obtida tomando-se a transformada inversa de Fourier da função X(f).

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}\,dt \qquad (10)$$

Tomando-se agora a transformada de Fourier de ambos os lados da expressão (1) pode-se estabelecer uma relação entre as transformadas P(f) do carregamento e V(f) da resposta.

$$V(f) = P(f)\,H(f) \qquad (11)$$

A função H(f) depende exclusivamente das caracteristicas da estrutura e é chamada de função de transferência. Demontra-se que a mesma é a transformada de Fourier da função de resposta.

A expressão (11) sugere uma nova maneira de se obter os deslocamentos:

a) Calcula-se inicialmente a transformada de Fourier do carregamento:

$$P(f) = F[p(t)] \qquad (11\text{-a})$$

b) Multiplica-se esta pela função de transferência, obtendo-se a transformada de Fourier dos deslocamentos:

$$V(f) = P(f)\,H(f) \qquad (11\text{-b})$$

c) Calculando-se a transformada inversa de V(f) obtemos o histórico dos deslocamentos:

$$v(t) = F^{-1}[V(f)] \qquad (11\text{-c})$$

Este procedimento, apesar de parecer mais longo do que o proposto anteriormente, pode apresentar enorme vantagem no caso númérico. Esta vatagem existe graças a um algorítimo computacional proposto por JAMES W. COOLEY & JOHN W. TUKEY[3] em 1965.

Este algorítmo, chamado de Transformada Rápida de Fourier, é uma maneira muito engenhosa de se obter as integrais das expressões (9) e (10) numericamente. Com isto a resposta é obtida através das expressões (11) com um tempo computacional bastante inferior ao que se teria se se utilizasse a expressão (8).

3. RESULTADOS

Um caso típico onde há interesse na obtenção dos deslocamentos de uma estrutura por um processo numérico, ocorre quando esta está sujeita aos efeitos de um terremoto.

Os efeitos de um terremoto podem ser traduzidos por acelerações $\ddot{v}_g(t)$, impostas na base da estrutura. Estas acelerações equivalem a uma força p(t) aplicada na massa dada por:

$$p(t) = -m\ddot{v}_g(t) \qquad (13)$$

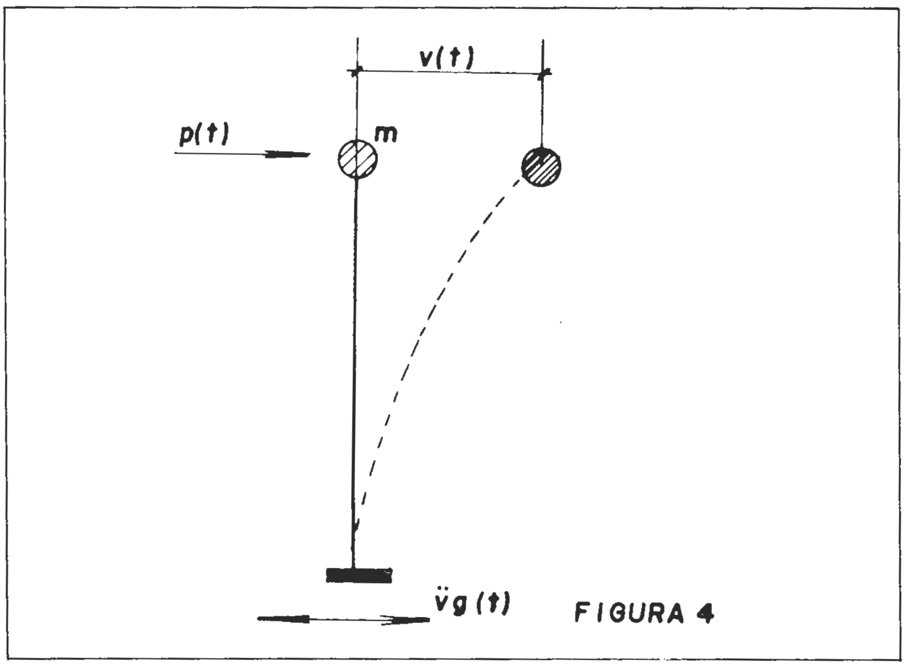


Figura 4 - Estrutura com um grau de liberdade sujeita a um terremoto.

A partir deste carregamento os deslocamentos v(t) da massa em relação a base da haste podem ser obtidos pela equação diferencial (1).

Na figura (5) é dado um gráfico, chamado de acelerograma, que fornece as acelerações $\ddot{v}_g(t)$ em função do tempo.

Este acelerograma é fornecido pela KWU (Kraftwerk Union) e é utilizado no Brasil como dado de projeto de usinas nucleares.

Na dissertação de mestrado desenvolvida pelo autor, foi calculada a resposta de uma estrutura, a este terremoto, com as seguintes características:

Rigidez: k = 1.600 kgf/m
Massa: m = 10 kgf seg^2/m
Porcentagem de amortecimento ϵ = 5%

A estes dados correspondem uma frequência natural e um período de aproximadamente 2,0 Hz e 0,5 segundos respectivamente.

Nas figuras 6 e 7 são apresentadas as respostas obtidas, numericamente, via domínio do tempo e da frequência respectivamente.

Comparando-se as respostas obtidas nos dois casos, verifica-se que elas são as mesmas. A diferença entre elas está no tempo de processamento gasto para obtê-las.

Utilizando um computador Burroughs B-6700 no primeiro caso a resposta foi gerada em 88,85 segundos e no segundo em 24,08 segundos.

4. CONCLUSÃO

O exemplo mostrado ilustra a vantagem do emprego da Transformada de Fourier. Esta vantagem aparece no caso numérico graças ao algorítmo computacional proposto por COOLEY & TUKEY[3].

Deve-se lembrar ainda que no caso de estruturas de n graus de liberdade a equação diferencial (1) deve ser resolvida n vezes. Neste caso a economia de tempo obtida no exemplo anterior é multiplicada pelo número de graus de liberdade da estrutura.

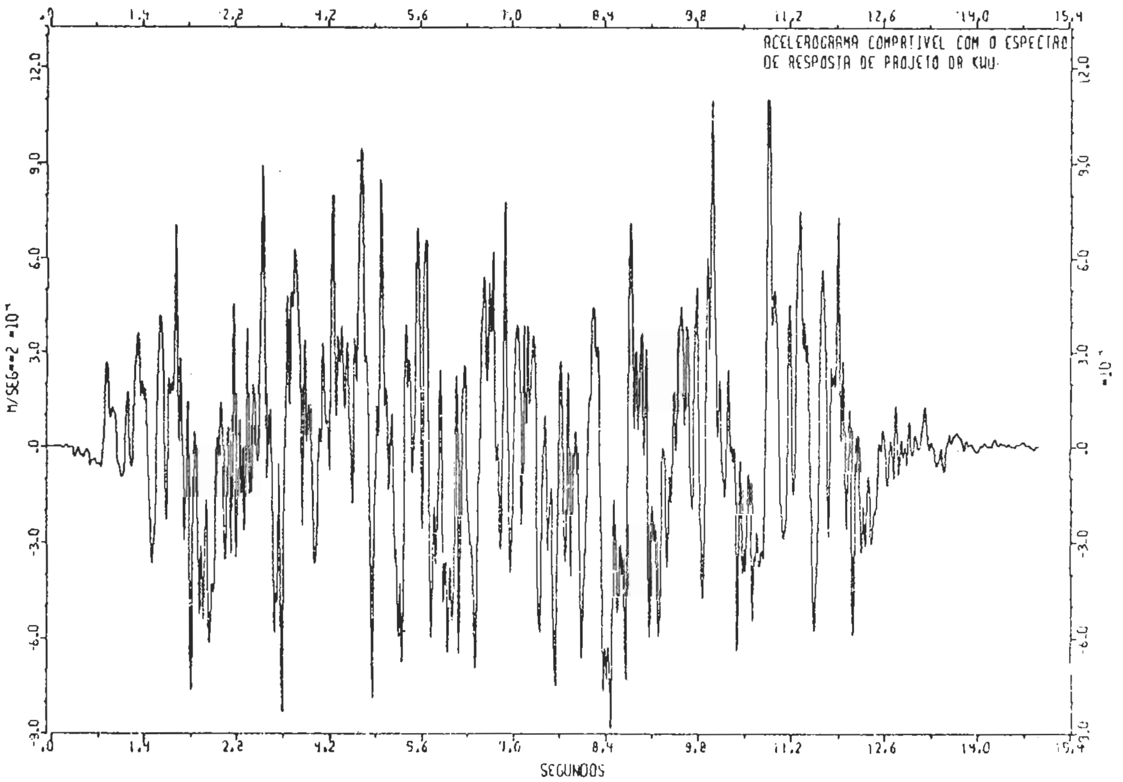


Figura 5 - Acelerograma compatível com o espectro de resposta da KWU.

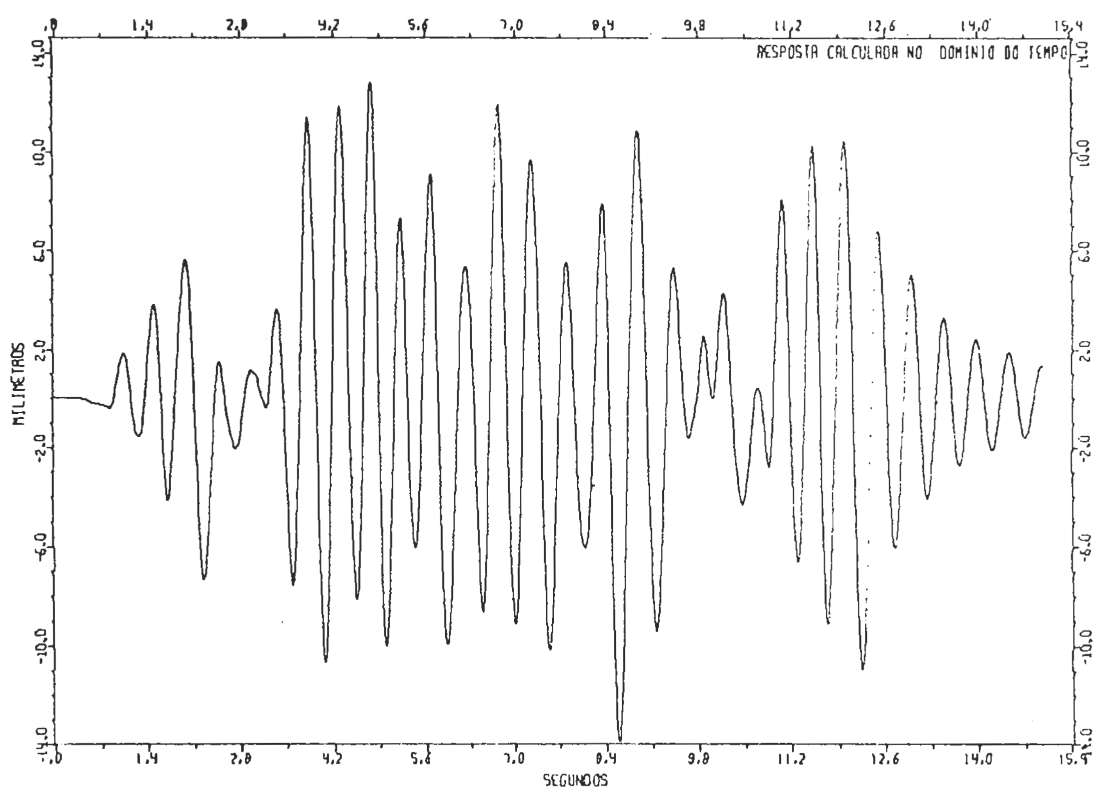


Figura 6 - Resposta calculada no domínio do tempo.

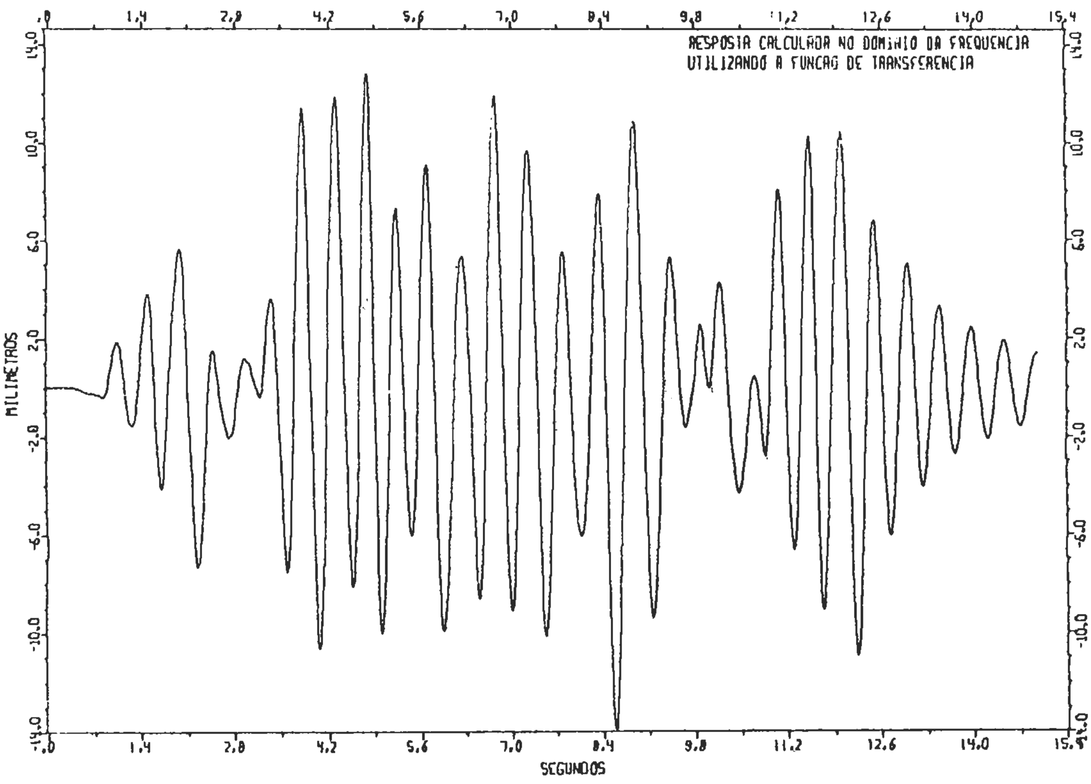


Figura 7 - Resposta calculada no domínio da freqüência utilizando a função de transferência.

ABSTRACT

The objective of this work is to show the use of Fourier Transform in the evaluation of the response of linear structures subjected to dynamic loading. The use of this technique is advantageous when the response is obtained numerically due to the Fast Fourier Transform algorithm.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - BRIGHAM, E.O. *The Fast Fourier Transform.* New Jersey Prentice Hall, 1974. 252 p.

2 - CLOUGH, R.W. & PENZIEN, J. *Dynamics of structures.* Tokyo. McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1975. 634 p.

3 - COOLEY, J.W. & TUKEY, H.W. An Algorithm for machine calculation of complex Fourier series". *Math. Computation, 19:* 297-301, Apr., 1965.