RELAÇÕES E RESTRIÇÕES FUZZY

MARIA APARECIDA PERRE[a]
RAUL HUMBERTO CORNEJO ROMERO[b]
THELMA HÉRENA NÉGRI BORGES[a]

RESUMO

Neste trabalho serão apresentadas as idéias básicas do que entendemos por conjuntos fuzzy, conjuntos imprecisos, vagos e as operações e propriedades elementares entre subconjuntos fuzzy, para logo, baseados nas idéias anteriores, fazer uma apresentação dos conceitos de relações fuzzy, que nos permitirá examinar com algum detalhe as idéias de restrições fuzzy, isto é, pensar em restrições fuzzy como relações fuzzy que influem de maneira determinante sobre os valores que podem ser dados a certas variáveis.

PALAVRAS-CHAVE: *Conjunto; Relação; Restrição.*

RELAÇÕES E RESTRIÇÕES FUZZY

1. INTRODUÇÃO

Na vida real, muitas vezes a teoria de conjuntos clássica não satisfaz plenamente a problemas que sejam de algum modo imprecisos, como por exemplo, quando tratamos com decisões de seres humanos. Baseado em tais fatos, foi que surgiu a teoria de conjuntos FUZZY[1]. E tal como na teoria clássica, podemos introduzir na teoria de conjuntos fuzzy, o conceito de relações fuzzy e, através dele, inserir a noção de restrições fuzzy. Tal conceito possui um papel fundamental nos casos citados anteriormente, pois as restrições fuzzy, fornecem uma base para operar com problemas nos quais é difícil precisar uma possível solução. Assim sendo, as restrições fuzzy acotam o espaço de soluções (tal como as restrições da teoria clássica) nos fornecendo uma simplificação do problema em questão.

Neste trabalho, faremos uma breve apresentação dos principais conceitos e propriedades de conjuntos fuzzy, e em seguida, trataremos de dar ao leitor as principais definições da relação fuzzy, e com essas ferramentas em mãos, nos deteremos com maiores detalhes no caso das restrições fuzzy além de alguns exemplos, dado ao fato que este último item é o objetivo principal desta exposição.

2. CONJUNTOS FUZZY

Existe uma certa classe importante de conjuntos na vida real que não podem ser expressados nos termos da teoria de conjuntos clássica, como por exemplo: o conjunto dos números reais próximos a cinco, o conjunto dos números racionais pequenos, etc.. Isto motivou ZADEH[3] a desenvolver uma nova teoria de conjuntos fuzzy, conjuntos estes, que fornecem as ferramentas necessárias, para poder expressar da melhor forma possível os conjuntos citados acima, além de fornecer condições de se obter a união, intersecção, etc., entre eles.

Definição 2.1 - Seja U um conjunto universo referencial. Se diz que A é um subconjunto fuzzy de U se:

$$A = \{u;\ \mu_A(u)/\mu_A : U \to [0,\ 1]\}\ .$$

onde μ_A é a função de associação ou de pertinência que caracteriza o conjunto A.

Se os valores assumidos pela função μ_A fosse o conjunto $\{0,\ 1\}$ então A seria um conjunto não fuzzy ou simplesmente um conjunto tradicional, assim:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in A \\ 0 & \text{se } u \notin A \end{cases}$$

a. Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Londrina.
b. Departamento de Matemática da Universidad de Tarapacá — Árica-Chile.

Desta maneira podemos notar que a função μ_A fornece a cada elemento de U um grau de associação ou de pertinência ao subconjunto fuzzy A de U.

Uma outra forma de denotar um subconjunto fuzzy A de U é:

$$A = \{\mu_A(u)/u/u \in \text{soop}(A)\}$$

onde / é o símbolo que separa o elementos $u \in U$ e seu grau de associação ou pertinência ao subconjunto fuzzy A de U e soop (A) não é outra coisa do que o suporte do subconjunto fuzzy A de U que se define como sendo:

$$\text{soop}(A) = \{ u \in U/\mu_A(u) > 0 \} .$$

NOTA: No que se segue, U será considerado, a menos que se diga o contrário, como um conjunto universo referencial.

Definição 2.2 – Seja A um subconjunto fuzzy de U. Define-se o complemento de A, em símbolo $\bar{A}$, como sendo:

$$\bar{A} = \{\mu_{\bar{A}}(u)/u/u \in \text{soop}(\bar{A})\}$$

onde $\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$ para qualquer u pertencente a U.

Definição 2.3 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Define-se a união de A e B, em símbolo $A \cup B$ como sendo:

$$A \cup B = \{\mu_{A \cup B}(u)/u \ / \ u \in \text{soop}(A \cup B)\}$$

onde $\mu_{A \cup B}(u) = \text{máximo}(\mu_A(u); \mu_B(u)) = \mu_A(u) \vee \mu_B(u)$ para qualquer u pertencente a U.

Definição 2.4 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Define-se a interseção de A e B em símbolo $A \cap B$ como sendo:

$$A \cap B = \{\mu_{A \cap B}(u)/u \ / \ u \in \text{soop}(A \cap B)\}$$

onde $\mu_{A \cap B}(u) = \text{mínimo}(\mu_A(u); \mu_B(u)) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)$ para qualquer u pertencente a U.

Definição 2.5 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Diz-se que A é subconjunto de B ou que A está incluido em B, em símbolo $A \subseteq B$ se para todo u pertencente a U $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$.

NOTA: Em geral podemos escrever que para todo u pertencente a U, $\mu_U(u) = 1$, o que quer dizer, que U está incluído em si mesmo no sentido de conjunto fuzzy. Assim, U é um conjunto sempre certo nesta teoria.

Definição 2.6 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Diz-se que A é igual a B, em símbolos, $A = B$ se para todo u pertencente a U, $\mu_A(u) = \mu_B(u)$.

NOTA: Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U, podemos observar que $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Definição 2.7 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Define-se a diferença entre A e B, em símbolos $A - B$ como sendo:

$$A - B = \{\mu_{A - B}(u)/u \ / \ u \in \text{soop}(A - B)\}$$

onde $\mu_{A - B}(u) = \text{mínimo}(\mu_A(u); 1 - \mu_B(u)) = \mu_A(u) \wedge (1 - \mu_B(u))$ para qualquer u pertencente a U.

NOTA: A diferença entre os subconjuntos fuzzy A e B de U pode ser denotada também como $A - B = A \cap \bar{B}$.

Definição 2.8 – Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Define-se a soma disjunta de A e B, em símbolos $A \pm B$, como sendo

$$A \pm B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

Sejam A, B e C subconjuntos fuzzy de U. Tais subconjuntos satisfazem as seguintes propriedades:

P.1- Propriedade Comutativa

- P.1.a- $A \cup B = B \cup A$
- P.1.b- $A \cap B = B \cap A$

P.2- Propriedade Associativa

- P.2.a- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- P.2.b- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

P.3- Propriedade da Idempotência

- P.3.a- $A \cup A = A$
- P.3.b- $A \cap A = A$

P.4- Propriedade Distributiva

- P.4.a- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- P.4.b- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

P.5- Propriedades em relação aos conjuntos vazio e universo

- P.5.a- $A \cup \emptyset = A$
- P.5.b- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- P.5.c- $A \cup U = U$
- P.5.d- $A \cap U = A$

P.6- Propriedade Involutiva

$(\bar{\bar{A}}) = A$

P.7- Propriedades de De Morgan

- P.7.a- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- P.7.b- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

NOTA: Pode-se observar que duas das importantes propriedades dos conjuntos tradicionais: $A \cup \bar{A} = U$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$ não são satisfeitas pelos conjuntos fuzzy.

3. RELAÇÕES FUZZY

Definição 3.1 – Uma relação fuzzy R sobre os conjuntos X e Y é um subconjunto fuzzy de X x Y($R \subseteq X \times Y$), onde R está caracterizado por uma função de associação:

$$\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$$
$$(x, y) \to \mu_R(x, y)$$

isto é, $R = \{\mu_R(x, y)/(x, y) \ / \ (x, y) \in soop(R)\}$.

Definição 3.2 Seja R uma relação fuzzy sobre os conjuntos X e Y. Define-se o domínio de R, em símbolo Dom R, como sendo:

$$\text{Dom } R(X, Y) = \{\mu_{Dom(R)}(x)/x \ / \ x \in soop(\text{Dom } R(X, Y))\}$$

onde $\mu_{Dom(R)}(x) = \sup\limits_{y} \mu_R(x, y)$ para todo x pertencente a X.

Definição 3.3 – Seja R uma relação fuzzy sobre os conjuntos X e Y. Define-se o contradmínio de R, em símbolos; Cdom R como sendo:

$$\text{Cdom } R(X, Y) = \{\mu_{Cdom(R)}(y)/y \ / \ y \in soop(\text{Cdom } R(X, Y))\}$$

onde $\mu_{Cdom(R)}(y) = \sup\limits_{x} \mu_R(x, y)$ para qualquer y pertencente a Y

A definição III.1 pode ser generalizada de uma maneira natural a n conjuntos como segue:

Definição 3.4 - Uma relação fuzzy sobre os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é um subconjunto fuzzy de $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ($R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$) onde R está caracterizado por uma função de associação:

$$\mu_R : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to [0, 1]$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

isto é,

$$R = \{\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in soop(R)\}.$$

Notação: Uma relação fuzzy R em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ se denota por $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$; ... ; $x_n \in X_n$.

Definição 3.5 – Sejam A e B dois subconjuntos fuzzy de X e Y respectivamente e R uma relação fuzzy em X x Y. Define-se uma relação fuzzy R entre A e B, em símbolo R(A, B) como sendo:

$$R(A,B) = \{\mu(x,y)/(x,y) \ / \ (x,y) \in soop(R); x \in soop(A); y \in soop(B)\}$$

onde $\mu(x, y) = \text{mínimo}(\mu_R(x, y); \mu_A(x); \mu_B(y))$.

A definição anterior pode ser generalizada de maneira natural a n subconjuntos fuzzy da seguinte maneira:

Definição 3.6 – Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n subconjuntos fuzzy de $X_1, X_2, \ldots X_n$ respectivamente e R uma relação fuzzy em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Se define uma relação fuzzy em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, em símbolo $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ como sendo:

$$R(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(x_1, x_2, \ldots, x_n)/(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in soop(R); x_i \in soop(A_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

onde

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{Min}(\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n); \mu_{A_1}(x_1); \mu_{A_2}(x_2); \ldots; \mu_{A_n}(x_n))$$

Definição 3.7 – Seja R uma relação fuzzy em X e Y. Define-se a projeção de R sobre X, em símbolos Proj (R, X) a um subconjunto fuzzy de X dado por:

$$\text{Proj}(R, X) = \{\mu(x)/x \ / \ x \in soop(\text{Proj}(R, X))\}$$

onde $\mu(x) = \text{Máx}_{y} \ \mu_R(x, y)$; $x \in X$; $y \in Y$.

Analogamente, a projeção de R sobre Y se define como:

$$\text{Proj}(R, Y) = \{\mu(y)/y \ / \ y \in soop(\text{Proj}(R, Y))\}$$

onde $\mu(y) = \text{Máx}_{x} \ \mu_R(x, y)$; $x \in X$; $y \in Y$.

Definição 3.8 – Seja R uma relação fuzzy em X x Y e S uma relação fuzzy em Y e Z. Define-se a composição de relações fuzzy de R e S, em símbolo R o S, a relação fuzzy dada por:

$$R \circ S = \{\mu(x, z)/(x, z) \ / \ (x, z) \in soop(R \circ S)\}$$

onde $\mu(x, z) = \text{máx}_{y}.\text{min}(\mu_R(x, y); \mu_S(y, z))$; $\forall x \in X$; $\forall z \in Z$.

Propriedades das composições de relações fuzzy

Sejam R uma relação fuzzy em X x Y; S uma relação fuzzy em Y x Z; U uma relação fuzzy em Z x W e T uma relação em Y x Z

P.1- Propriedade Associativa

$R \circ (S \circ U) = (R \circ S) \circ U$

P.2- Propriedade Distributiva

P.2.a- $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

P.2.b- $R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$

P.3- Propriedade da Monotonia

Se $S \subseteq T$ então $R \circ S \quad R \circ T$

P.4- Propriedade do Máximo-Mínimo-Produto matricial Máx-Mín.

Quando os universos X e Y são finitos, uma relação fuzzy R em X x Y pode ser representada por uma matriz $|R|$ cujo termo genérico $[R]_{ij}$ é: $\mu_R(x_i; y_j) = r_{ij}$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ onde $|X| = n$ e $|Y| = m$.

NOTA: A composição de relações fuzzy finitas pode ser vista como um produto de matrizes, com $[S]_{jk} = s_{jk}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ e $|Z| = p$, $[R \circ S]_{ik} = \sum_j r_{ij}\, s_{jk}$, onde Σ é a operação máximo e o produto a operação mínimo.

Definição 3.9 – Seja R uma relação fuzzy em X x Y e A um subconjunto fuzzy de X. Se define o subconjunto fuzzy induzido por A em Y, em símbolo B•, como sendo:

$$B^\bullet = R \circ A = \{\mu(y)/y \;/\; y \in \text{soop}\,(B^\bullet)\}$$

onde $\mu(y) = \underset{x}{\text{Máx}}\{\min(\mu_R(x, y);\ \mu_A(x));\ x \in X;\ y \in Y\}$.

A definição anterior pode ser generalizada de uma maneira natural do seguinte modo

Definição 3.10 Seja R uma relação fuzzy em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ e $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+2}, \ldots$ subconjuntos fuzzy de $X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_n$ respectivamente. Se define o subconjunto fuzzy de X_j induzido pelos A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$, em símbolos $A_j^\bullet$ como a composição de R e A_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$, isto é:

$$A_j^\bullet = \{\mu(x_j)/x_j \;/\; x_j \in \text{soop}(A_j^\bullet)\}$$

onde $\mu(x_j) = \underset{x_i}{\text{Máx}}\{\text{mín}(\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \mu_{A_1}(x_1); \mu_{A_2}(x_2); \ldots; \mu_{A_{j-1}}(x_{j-1});\ \mu_{A_{j+1}}(x_{j+1});\ \ldots;\ \mu_{A_n}(x_n));\ x_i \in X_i;$ $i = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i;\ x_j \in X_j\}$.

Propriedades

Seja R uma relação fuzzy em X x Y, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y respectivamente, seja A• um subconjunto fuzzy de X induzido por B e B• um subconjunto fuzzy de Y induzido por A, isto é: $A^\bullet = B \circ R$ e $B^\bullet = R \circ A$ então:

$$\text{Proj}\,[R(A, B);\ X] = A \wedge A^\bullet$$

$$\text{Proj}\,[R(A, b);\ Y] = B \wedge B^\bullet .$$

Definição 3.11 – Seja R uma relação fuzzy em X x Y. Define-se a relação inversa fuzzy de R, em símbolo R^{-1}, a uma relação em Y x X tal que:

$$R^{-1} = \{\mu_{R^{-1}}(y, x)/(y, x) \;/\; (y, x) \in \text{soop}\,(R^{-1})\}$$

onde $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$ para todo (y, x) pertencente a R^{-1}.

Definição 3.12 – Seja R uma relação fuzzy em $X = X \times X$. Diz-se que R é reflexiva se $\mu_R(x, x) = 1$ para todo x pertencente a X.

Definição 2.12 – Seja R uma relação fuzzy em X. Diz-se que R é antireflexiva em X se $\mu_R(x, x) = 0$ para qualquer x pertencente a X.

Definição 3.13 – Seja R uma relação fuzzy em X. Diz-se que R é simétrica se $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ para qualquer x,y pertencente a X.

Definição 3.14 – Seja R uma relação fuzzy em X. Diz-se que R é antissimétrica se para todo $x \neq y$, $\mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x)$ ou $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0$ para qualquer x,y pertencente a X.

Definição 3.15 – Seja R uma relação fuzzy sobre S. Diz-se que R é máx-mín.transitiva se $R \circ R \subseteq R$, ou mais explicitamente: se $\mu_R(x, z) \geq \min(\mu_R(x, y);\ \mu_R(y, z))$ para qualquer x, y, z pertencente a X.

Definição 3.16 – Seja R uma relação fuzzy sobre X x Y. Diz-se que R satisfaz à propriedade de simetrização, se $R \circ R^{-1}$ é uma relação fuzzy reflexiva e simétrica sobre X.

Propriedade: Uma relação fuzzy não nula Q sobre X é reflexiva e simétrica se e somente se houver um universo Y e uma relação fuzzy R sobre X x Y tal que $Q = R \circ R^{-1}$.

Definição 3.17 – Seja S uma relação fuzzy em um universo X. Diz-se que S é uma relação de similaridade se S é reflexiva, simétrica e máx-mín. transitiva.

Observação: O conceito de relação de similaridade é uma generalização do conceito de relação de equivalência.

Definição 3.18 – Seja S uma relação fuzzy em um universo X. Diz-se que o complemento de S, digamos $\overline{S} = D$ é uma relação de dissimilaridade se D é antireflexiva, simétrica e máx-mín. transitiva.

Definição 3.19 – Seja P uma relação fuzzy em X, se diz que P é um conjunto fuzzy parcialmente ordenado se P é reflexiva, antissimétrica e máx-mín. transitiva.

Observação: Se X é finito, é possível representar P (conjunto parcialmente ordenado) como uma matriz triangular ou como um diagrama fuzzy de Hasse [2] . Onde um diagrama fuzzy de Hasse é um gráfico dirigido, cujos vértices, são os elementos de X, tal que a orientação entre dois vértices x e y existe se $\mu_P(x, y) > 0$ e cada orientação $x \to y$ toma o valor $\mu_P(x, y)$.

Exemplo:

$$\mu_P = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,2 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

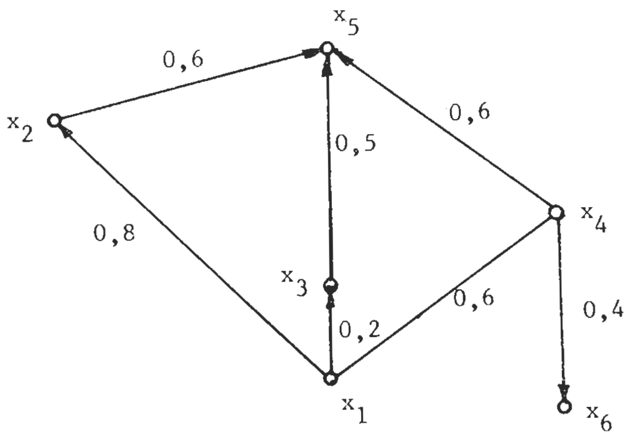

Gráfico III.1

4. RESTRIÇÕES FUZZY

Desenvolveremos as idéias de restrições fuzzy , tendo-as como relações fuzzy restritivas, isto é, como relações fuzzy que influem de maneira determinante sobre os valores que podem ser dados a certas variáveis.

Sejam X uma variável que toma valores em um universo U, e u um elemento genérico de U de tal forma que quando X for igual a u, significará que à variável X estará dado o valor u pertencente à U.

Definição 4.1 – Seja F um subconjunto fuzzy de U que está caracterizado por uma função de pertinência ou de associação μ_F. Diz-se que F é uma restrição fuzzy associada com X (ou sobre X) se F atua como uma restrição sobre os valores que podem ser dados à variável X.

Observação: Esta definição deve ser entendida no seguinte sentido: o valor fornecido a um u pertencente a U à variável X tem a forma $X = u/\mu_F(u)$ onde $\mu_F(u)$ se interpreta como o grau para o qual a restrição representada por F se satisfaz quando fornecemos o valor u pertencente a U à variável X.

Notação: Denotamos por R(X) uma restrição fuzzy associada à variável X.

Definição 4.2 – Para expressar que F tem o papel de uma restrição fuzzy em relação à X, escrevemos R(X) = F, a qual denominamos de equação de relação dos valores restringidos (relational assignment equation) [3]

Observação: R(X) = F se denomina equação de relação dos valores restringidos porque representa a restrição fuzzy de um conjunto fuzzy F (ou relação fuzzy) à restrição fuzzy R(X) associada com X.

Para ilustrar o conceito de restrição fuzzy, consideremos uma proposição da forma p ≐ X é F (se lê: p denota X é F), onde x é o nome de um objeto, uma variável ou uma proposição e F é o nome de um subconjunto fuzzy de U como por exemplo: X é um número pequeno, X é um número grande, Maria é muito inteligente, etc... A translação da proposição p ≐ X é F pode ser expressada através da equação de relação dos valores restringidos como R [A(X)] = F onde A(X) é um atributo implícito de X que toma valores em U. A equação de relação de valores restringidos R [A(X)] = F significa que a proposição p ≐ X é F tem o efeito de dar ao subconjunto fuzzy F a restrição fuzzy R sobre os valores de A(X).

Exemplo:

1- Consideremos a seguinte proposição p: Maria é uma mulher jovem. Jovem é um subconjunto fuzzy F do conjunto universal U = [0, 100] (anos) caracterizado pela função de pertinência ou de associação $\mu_F(u) = \mu_{jovem}(u) = 1 - S(u; 20; 30; 40)$ onde $u \in U$ é a idade numérica e S uma função definida por

$$S(u; 20; 30; 40) = \begin{cases} 0 & \text{se } u < 20 \\ 2\left(\frac{u-20}{20}\right)^2 & \text{se } 20 < u < 30 \\ 1 - 2\left(\frac{u-20}{20}\right)^2 & \text{se } 30 < u < 40 \\ 1 & \text{se } u > 40 \end{cases}$$

Graficamente teríamos a seguinte situação:

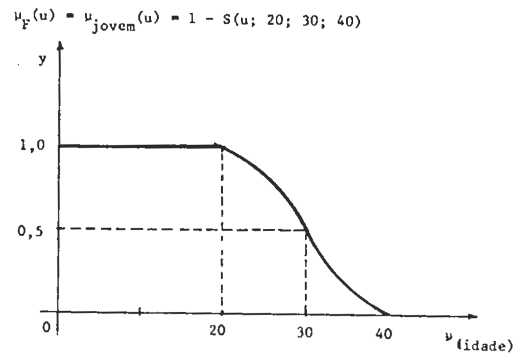

Gráfico IV.1

podemos notar que $\mu_F(30) = \mu_{jovem} = 1 - S(30;20;30;40) = 0,5$

O atributo implícito de X, digamos A(X) é Idade (Maria). Assim a translação da proposição p≐X é F(p:Maria é uma mulher jovem), pode ser expressa através da equação de relação dos valores restringidos como R [A(X)] = F (R [idade (Maria)] = = jovem).

Interpretação: Seja u = 30 [anos], então $\mu_F(30) = \mu_{jovem}(30) = 0,5$ o que interpretamos como se segue: o grau de pertinência de u = 30 anos no conjunto fuzzy jovem é 0,5 ou também podemos dizer que 0,5 é o grau de compatibilidade de u = 30 anos com o conceito rotulado jovem.

2- Consideremos a seguinte proposição p: X é um número pequeno. Pequeno é um subconjunto fuzzy F de um conjunto universo $U = R_o^+$ caracterizado pela função de pertinência ou de associação $\mu_F(u) = \mu_{pequeno}(u) = e^{-ku^2}$; $k > 0$.

Graficamente teríamos a seguinte situação:

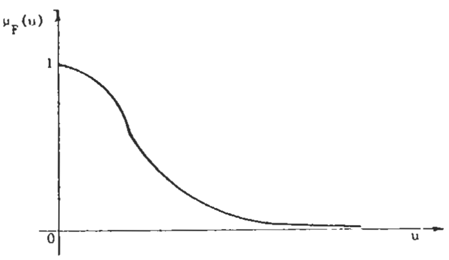

Gráfico IV.2

O atributo implícito de X, digamos A(X) é o valor (X). Assim, a translação da proposição p ≐ X é F (p: X é um número pequeno), pode ser expressa através da equação de relação dos valores restringidos como:

$$R[A(X)] = F \quad (R[\text{valor } (X)] = \text{pequeno}).$$

Definição IV.3- Seja a coleção de proposições

$p_k \doteq (X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_n})$ é F_k; $k = 1, 2, \ldots, m$, onde F_k é uma relação fuzzy em $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_n}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. A coleção de proposições anteriores definem conjuntamente uma restrição fuzzy sobre o objeto $(X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_n})$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Observação: F_k é um subconjunto fuzzy de $U_{k_1} \times U_{k_2} \times \ldots \times U_{k_n}$, com $k = 1, 2, \ldots, m$.

Definição IV.4- Para expressar que F_k tem o papel de uma restrição fuzzy em relação a $(X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_n})$ com $k = 1, 2, \ldots, m$, escrevemos:

$$R[A_{k_1}(X_{k_1}); A_{k_2}(X_{k_2}); \ldots; A_{k_n}(X_{k_n})] = F_k \text{ com } k = 1, 2, \ldots, m.$$

onde $A_{k_i}(X_{k_i})$ é um atributo implícito de X_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que toma valores em U_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e que chamaremos de sistema de equações de relações dos valores restringidos.

Exemplos:

1- Sejam as proposições $p_1 \doteq X_1$ é F_1 e $p_2 \doteq X_2$ é F_2 onde F_i é subconjunto fuzzy de U_i; $i = 1, 2$. Estas duas proposições tomadas conjuntamente dão origem a uma proposição composta X_1 é F_1 e X_2 é F_2. Por outro lado temos:

i- Se X_1 é F_1 e X_2 é F_2 então(X_1, X_2) é $F_1 \times F_2$ que é conhecida como regra da restrição máxima, onde $F_1 \times F_2$ é um subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2$ que está caracterizado pela função de associação $\mu_{F_1 \times F_2}(u_1, u_2) = \text{Min}(\mu_{F_1}(u_1); \mu_{F_2}(u_2))$.

ii- Se X_1 é F_1 e X_2 é F_2 com $X_1 = X_2$ então X_1 é $F_1 \cap F_2$; $i=1,2$, onde $F_1 \cap F_2$ é um subconjunto fuzzy de $U_1 \cap U_2$ que está caracterizado pela função de associação

$$\mu_{F_1 \cap F_2}(u_1, u_2) = \text{Min}(\mu_{F_1}(u_1), \mu_{F_2}(u_2)) \quad .$$

2- Sejam as proposições

$$\begin{cases} p_1 \doteq X_1 \text{ é pequeno y} & (*) \\ p_2 \doteq X_1 \text{ e } X_2 \text{ são aproximadamente iguais} \end{cases}$$

Para simplificar, suponhamos que

$U_1 = U_2 = \{0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 1;\ 2;\ 5;\ 10\}$ e os subconjuntos fuzzy F_1 e F_2 de U_1 e U_2 respectivamente são

F_1 = pequeno = {1/0,1; 0,9/0,3; 0,5/0,5; 0,1/1 }

F_2 = aproximadamente iguais = {1/ [(0,1;0,1); (0,3;0,3); (0,5 ; 0,5); (1,1); (2,2); (5,5); (10,10)] ; 0,6/ [(0,1;0,3);(0,3;0,5)]; 0,3/(0,1;0,5); 0,1/(0,5;1)} .

Representaremos matricialmente os subconjuntos fuzzy F_1 e F_2 :

$$F_1 : \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 0,9 & 0,5 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 : \begin{array}{c|ccccccc} & 0,1 & 0,3 & 0,5 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ \hline 0,1 & 1 & 0,6 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 1 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

O atributo implícito de X_1, digamos $A_1(X_1)$ é o valor (X_1) e o atributo implícito de X_1 e X_2, digamos $A_1(X_1)$; $A_2(X_2)$ é o valor (X_1); valor (X_2). Assim, a translação da proposição $p_1 \doteq X_1$ é F_1 (p_1 : X_1 é pequeno) e da proposição $p_2 \doteq X_1$ e X_2 é F_2 (p_2 : X_1 e X_2 são aproximadamente iguais) podemos expressar através da equação de relação dos valores restringidos como:

$R[A_1(X_1)] = F_1(R[\text{valor }(X_1)] = \text{pequeno})$ e

$R[A_1(X_1); A_2(X_2)] = F_2(R[\text{valor }(X_1); \text{valor }(X_2)] = \text{aproximadamente iguais})$ respectivamente.

Das proposições (*) podemos inferir uma nova proposição; por exemplo: $p \doteq X_2$ é mais ou menos pequeno.

Denotemos por F a relação fuzzy: mais ou menos pequenos, a qual podemos considerar como uma solução aproximada do sistema de equações das relações dos valores restringidos que representam as proposições (*), isto é, F pode ser considerado como uma solução aproximada do sistema:

$$R[A_1(X_1)] \doteq F_1$$
$$R[A_1(X_1); A_2(X_2)] = F_2 \quad .$$

Nosso problema agora, é encontrar explicitamente o subconjunto fuzzy F de U, que denota a relação fuzzy: mais ou menos pequeno.

Do que sabemos de relações fuzzy, podemos encontrar F mediante a composição das relações fuzzy F_1 e F_2, isto é, $F = F_1 \circ F_2$ através da propriedade Máx-Mín (produto matricial Máx-Mín).

Realizando este produto matricial Máx-Mín. de F_1 e F_2 obtemos:

$$F : \begin{array}{ccccccc} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 1 & 2 & 5 & 10 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,6 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, F = mais ou menos pequeno = {1/0,1; 0,9/0,3; 0,6/0,5;0,1/1},

o que nos fornece que a restrição fuzzy para X_2 está dada por:

$$R[A_2(X_2)] = F = \{1/0,1;\ 0,9/0,3;\ 0,6/0,5;\ 0,1/1\} .$$

COMENTÁRIO FINAL: Através do desenvolvimento deste trabalho esperamos haver deixado suficientemente claro o papel que possui as relações fuzzy dentro dos problemas colocados pelas restrições fuzzy nas aplicações relativas a situações imprecisas, como no caso das decisões humanas, temas estes, que são estudados com mais profundidade em teoria das possibilidades, que esperamos ser o objetivo de uma nova publicação.

ABSTRACT

In this work would be presented the basic ideas about Fuzzy sets, vague sets and the elementary operations and properties about Fuzzy subsets depending upon the provious ideas, to give a presentation of concepts regarding Fuzzy relations, which would allow us study some depth the ideas of Fuzzy restrictions, i.e., to think Fuzzy restrictions as Fuzzy relations which influence in a determined manner on the values which can be given to certain variables.

KEY-WORDS: *Set; Statement; Restriction.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. KAUFMANN, A. *Introduction to the theory of fuzzy subsets.* New York, Academic Press, 1975.
2. MIGUEL, R.A. *Una introducion a la teoria de conjuntos fuzzy y su aplicacion a la ejecucion de programas fuzzy.* Universidad Central de Venezuela, 1985.
3. ZADEH, L.A. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.* North Holland publishing company, 1977.
3. ZADEH, L.A. Fuzzy sets. *Information and Control, 8:* 338-353 1965.
4. APARECIDA, P.M.; THELMA, B.; ARTURO, F.; HERIBERTO, F. Fuzzy: um modelo matemático do subjetivo. *Semina,* 7(1): 20-24, jan/abr., 1986.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos Professores: Cleusa Rocha Asanome (DMAP - UEL) pela confecção dos gráficos; Antonio Fernando Prado de Andrade (DMAT - UEL) por haver sugerido a investigação nesta área de pesquisa; Rodney Carlos Bassanezi (UNICAMP) pela coordenação geral do projeto de pesquisa que gerou este trabalho.