FUZZY: MODELO MATEMÁTICO DO SUBJETIVO

MARIA APARECIDA PERRE[a]
THELMA HERENA NEGRI BORGES[a]
RUDECINDO ARTURO FLORES FRANULIC[b]
HERIBERTO ROMAN FLORES[b]

RESUMO

O presente trabalho pretende ser uma divulgação básica dos conceitos fundamentais da Teoria de Conjuntos Fuzzy, como uma forma de mostrar um novo enfoque de Matemática, da qual já existem estudos específicos no terreno da Topologia, Espaços Vetoriais, Medida e Integração, Estatística, etc. Tem os seguintes objetivos: 1o. comparar estes novos conceitos com os conceitos tradicionais da teoria de conjuntos clássica e; 2o. tentar de forma didática, interpretar este novo modelo matemático, que reflete, de maneira mais clara, o comportamento humano.

PALAVRAS-CHAVE: *Modelo matemático; Conjuntos fuzzy.*

1. INTRODUÇÃO

A teoria clássica de conjuntos sobre a qual descansa todo o aparato matemático tradicional, baseia-se fundamentalmente em uma lógica bivalente, no sentido de que dado um universo X, a qualidade do membro de um elemento x em um subconjunto A de X, é uma noção do tipo tudo ou nada. Mais ainda, se acostumou a dizer que um conjunto A fica plenamente definido se dado um elemento x de X é possível decidir, sem lugar a dúvida, se x pertence ou não pertence ao conjunto A.

Fica assim então modelada uma situação de verdadeiro-falso que, na realidade, não reflete fielmente o que ocorre, principalmente com o comportamento humano. Nem sempre as situações do mundo real se apresentam no modelo tudo ou nada. Existem situações que são vagas por natureza; situações nas quais o cumprimento ou não de um certo predicado não corresponde ao modelo determinístico de sim ou não ainda que a transição entre o cumprimento ou não desse predicado seja mais gradual do que brusco. Em termos de conjuntos, poderíamos dizer que a transição entre x pertence a A ou x não pertence a A é gradual e não determinístico, ficando então determinado um conjunto de objetos o qual, evidentemente, não possui fronteiras claras, bem definidas. Isto é na essência, o que ZADEH[11,12] propõe como um Conjunto Fuzzy em um dado universo X, e como consequência disto, a *fuzzyness* de um certo símbolo se interpreta como uma falta ou carência de fronteiras bem definidas do conjunto de objetos ao qual o símbolo se aplica.

Conjuntos Fuzzy são encontrados frequentemente na vida real. Por exemplo, um conjunto fuzzy A pode ser o conjunto de homens baixos (mulheres bonitas) da Universidade Estadual de Londrina. É claro que existem homens (mulheres) na Universidade Estadual de Londrina que são definitivamente baixos (bonitas) e que, portanto, pertencem ao conjunto em questão; outros que não são baixos (não são bonitas = feias) e que, evidentemente não pertencem ao conjunto. Mas é óbvio também que existem os casos fronteira, isto é, aqueles casos em que existe uma situação vaga em torno da pertinência e que, incluído, poderíamos ordenar os elementos duvidosos no sentido de estabelecer quem tem mais possibilidade de pertencer ao citado conjunto.

Tradicionalmente, na teoria clássica de conjuntos, ao quantificar a pertinência de um dado elemento x de X (universo) a um certo subconjunto A de X se associa o valor 1 a todos aqueles elementos que pertencem totalmente ao conjunto A e o valor zero a todos aqueles que sem lugar de dúvida não pertencem a A. É natural então pensar que no âmbito fuzzy, o grau de pertinência ao conjunto A nos casos fronteira será um número entre zero e um, de maneira que quanto mais um elemento x pertença a A, mais perto de um será seu grau de pertinência e que quanto menos possibilidade de pertencer tenha um elemento, mais perto de zero será seu grau de pertinência.

É claro então que o uso do intervalo $[0, 1] = \{x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ como uma escala numérica, nos permite representar convenientemente o grau de pertinência e é evidente também que valores precisos do grau de pertinência não existem por si mesmos ainda que eles sejam índices de tendência subjetivamente associados por uma pessoa ou grupo de pessoas. Esta situação é extremamente clara no caso do exemplo. O número real entre zero e um que quantifica, em um momento dado, o grau de pertinência de um elemento x a um dado subconjunto A, pode interpretar-se como o grau de compatibilidade do predicado associado com A e o elemento x. Notemos também que, como no caso do exemplo, para conceitos relacionados com uma escala de medida física (ordenamento, em geral) a associação de valores de grau de pertinência será, com freqüência, me-

a Depto. Matemática Aplicada – UEL.
b Depto. Matemática – Universidade de Tarapacá – Árica - Chile.

nos controvertido que para conceitos mais subjetivos e complexos como, por exemplo, beleza.

Sobre o conceito de conjunto fuzzy dado por ZADEH[11,12] descansa o fundamento da matemática fuzzy que pretende prover teorias e sistemas matemáticos como uma nova e poderosa ferramenta para tratar os problemas do mundo real. Deste modo, estão sendo investigadas aplicações desta nova-matemática a aspectos tão diversos como Teoria de Probabilidades[13], Análise de Sistemas[8], Modelos de Aprendizagem[10], Teoria do Controle Automático[1], etc...

2. CONJUNTOS FUZZY

Seja X um conjunto clássico de objetos, chamado Universo e seja x um elemento genérico de X. A qualidade de membro em um subconjunto clássico A de X é usualmente expressada através da função característica do conjunto A, definida por $\mu_A : X \to \{0, 1\}$ tal que

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

Definição 2.1 – Se o conjunto de valores de $\mu_A(x)$ se estende a todo intervalo $[0, 1] \subset R$ então A é chamado um conjunto fuzzy[11].

O valor $\mu_A(x) \in [0, 1]$ representa o grau de pertinência de x em A, ficando claro que se $\mu_A(x) = 1$ então x pertence a A sem lugar de dúvida e se $\mu_A(x) = 0$ então x, com certeza não pertence a A. Claramente então, A é um subconjunto de X que não tem fronteiras bem definidas. Embora tenhamos que aceitar a seguinte notação:

$$x \in A, \text{ sse, } \mu_A(x) \neq 0.$$

O conjunto A é completamente caracterizado pelo conjunto de pares $(x, \mu_A(x))$, $x \in X$; ou seja

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

Entretanto, ZADEH[14] propõe uma notação diferente:

1) Se $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (ou seja X é um conjunto finito), um conjunto fuzzy A em X se denota por:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i))/x_i$$

(Na expressão anterior podemos omitir aqueles $x \in X$ tais que $\mu_A(x) = 0$ dado que o símbolo Σ é apenas uma notação).

2) Se X não é finito, A pode denotar-se da seguinte maneira:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Observemos novamente que o símbolo $\int$ é apenas uma notação.

Definição 2.2 - Dois conjuntos fuzzy $A, B \subset X$ são iguais e escrevemos A = B, se e somente se $\forall x \in X$, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Notemos que X, o conjunto universo, não é fuzzy. (Evidentemente, $\forall x$, $\mu_X(x) = 1$).

Definição 2.3 – O conjunto fuzzi $A \subset X$ se diz subconjunto do conjunto fuzzy $B \subset X$, e escrevemos $A \subset B$ se, e somente se,

$$\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x),$$

para todo $x \in X$.

Definição 2.4 – Para todo $x \in X$ o conjunto fuzzy ϕ está definido por:

$$\mu_\phi(x) = 0.$$

Deduz-se então, que o conjunto fuzzy ϕ é único.

Definição 2.5 – Seja A um subconjunto fuzzy de X. Então, para todo $x \in X$.

a) Chamaremos suporte de A; e denotaremos por sopp A, ao subconjunto clássico de X

$$\text{sopp } A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \cdot$$

b) Os elementos $x \in X$ tais que $\mu_A(x) = 1/2$ são chamados elementos em trânsito de A.

c) A altura de A, denotada por hgt(A), é definida por:

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x) \mid x \in X\}$$

ou seja, a altura de A é a menor das cotas superiores do conjunto $\{\mu_A(x) \mid x \in X\} \subset [0, 1]$.

d) A se diz normalizado se, e somente se, existe $x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$. Claramente, todo conjunto fuzzy A normalizado possui altura 1.

É interessante a definição de ponto fuzzy dada por F.T. CHRUSTOPH[3].

Definição 2.6. – Um ponto fuzzy p em X é um conjunto fuzzy com função de pertinência

$$\mu_p(x) = \begin{cases} y \text{ para } x = X_o \\ 0 \text{ outro caso, } y \in (0, 1) \end{cases}$$

x_o se chama o suporte de p e ao número y o valor de p. Também, diremos que p está no conjunto fuzzy A e escreveremos $p \in A$, se para todo x pertencente a X

$$\mu_p(x) < \mu_A(x).$$

Na linguagem da matemática tradicional a definição 2.6 pode ser expressa na forma: Um ponto fuzzy p em X é um conjunto fuzzy com função de pertinência $\mu_p : p \to [0,1]$ tal que

a) $\mu_p(x) \in (0, 1)$ se $x \in X_o$

b) $\mu_p(x) = 0$ se $x \notin X_o$

onde o conjunto X_o é denominado suporte de p.

Vejamos agora alguns exemplos de modo a esclarecer melhor as definições anteriores:

1) Seja $X = \{n \in N \mid n \leqslant 20\}$ e consideremos o conjunto fuzzy A dado por:

$A = 0{,}1/7 + 0{,}5/8 + 0{,}8/9 + 1{,}0/10 + 0{,}9/11 + 0{,}8/12 + + 0{,}5/13 + 0{,}2/14$

(pensemos que os outros números naturais em X possuem um grau de pertinência nula).
Então A é um conjunto fuzzy, normalizado, de números naturais próximos ou iguais a 10.
Além disso,

sopp $A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \subset X$.

2) Consideremos $X = R$ e seja

$$\mu_A(x) = (1 + x^2)^{-1},$$

para todo $x \in R$.

Um breve estudo desta função nos dá os seguintes resultados:

a) $\mu_A(x) > 0$,

b) $\mu_A(0) = 1$ e $\mu_A(x) < 1$,

c) $\lim_{x \to \pm\infty} \mu_A(x) = 0$.

Assim,

$$A = \int_R (1 + x^2)^{-1}/x$$

representa um conjunto fuzzy, normalizado, tal que sopp $A = R$. Este conjunto é um conjunto fuzzy de números reais acumulados em torno do número real zero. Entretanto, devido a) e c) não existe nenhum número real do qual possamos dizer que não pertença a A, mas é claro que à medida que x aumenta ou diminui o seu valor em relação ao real zero, seu grau de pertinência vai se tornando cada vez menor.

3) Seja $X = R_0^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ e consideremos:

$$\mu_A(x) = x(x + 1)^{-1}.$$

Para todo $x \in R_0^+$ tem-se que:

a) $\mu_A(0) = 0$;

b) $\mu_A(x) < 1$;

c) $\lim_{x \to \infty} \mu_A(x) = 1$.

Com estas considerações, podemos dizer que o conjunto fuzzy A é não normalizado, a altura de A é igual a um, sopp $A = R^+$, com certeza $x = 0$ não pertence a A e que quanto mais cresça x seu grau de pertinência será maior.
É conveniente ressaltar os seguintes fatos:

a) A teoria clássica de conjuntos passa a ser um caso particular da teoria de conjuntos fuzzy (isto estará mais reforçado ainda em 3 com as operações de conjuntos).
b) No fundo, a função de pertinência $\mu_A(x)$ descreve totalmente o conjunto fuzzy A. Assim, qualquer função $f : X \to [0, 1]$ é, em essência, um conjunto fuzzy.

3. OPERAÇÕES DE CONJUNTOS FUZZY

As operações ordinárias de união, interseção e complementação da teoria clássica de conjuntos podem ser estendidas ao âmbito fuzzy, como o próprio ZADEH[11] desenvolveu da seguinte maneira:

Definição 3.1. - Sejam $A \subset X$, $B \subset X$ conjuntos fuzzy com $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, respectivamente, suas funções de pertinência associadas.
Então:
a) A união de A com B, denotada por $A \cup B = C \subset X$, se define como

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

para todo $x \in X$.
b) A interseção de A com B, denotada por $A \cap B = D \subset X$, se define como:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

para todo $x \in X$.
Nas duas definições $\vee$ e $\wedge$ indicam o supremo e o ínfimo em $[0, 1]$ respectivamente.
A generalização destes conceitos é natural. Sejam I um conjunto de índices e $(A_i)_{i \in I}$ uma coleção de conjuntos Fuzzy em X.
Então:
a) $C = \bigcup_{i \in I} A_i$, sse, $\mu_C(x) = \bigvee_I \{\mu_{A_i}(x)\}$
b) $D = \bigcap_{i \in I} A_i$, sse, $\mu_D(x) = \bigwedge_I \{\mu_{A_i}(x)\}$.

Definição 3.2 - Seja A um conjunto fuzzy em X com função de pertinência $\mu_A(x)$. Se $\bar{A}$ denota o complemento de A, então:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

para todo $x \in X$.
Considerando as definições dadas, é bastante claro que elas nos fornecem a união, interseção e complementação clássicas quando o conjunto de valores das funções de pertinência se reduzem ao conjunto $\{0, 1\}$. O leitor poderia facilmente analisar os casos distintos.
NOTA: o leitor interessado em conhecer o fundamento das escolhas de supremo e ínfimo como operadores adequados para definir estas operações de conjuntos fuzzy, poderá consultar 2, 5 e 4.

3.3. Propriedades das operações de conjuntos fuzzy

Sejam $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$ conjuntos fuzzy. Então, a união, interseção e complementação fuzzy satisfazem, entre outras, as seguintes propriedades:

1-a) $A \cup B = B \cup A$
1-b) $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade)

2-a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2-b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associatividade)

3-a) $A \cup A = A$
3-b) $A \cap A = A$ (idempotência)

UEL
BIBLIOTECA CENTRAL

4-a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4-b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributividade)

5-a) $A \cap \phi = \phi$
5-b) $A \cup X = X$

6-a) $A \cup \phi = A$
6-b) $A \cap X = A$

7-a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
7-b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (Leis de De Morgan)

8) $\bar{\bar{A}} = A$ (Involução)

9) Se $A \subset B$ então $\bar{B} \subset \bar{A}$

A validade destas propriedades é evidente a partir das definições das operações de conjuntos.

Em contrapartida ao que ocorre na teoria clássica de conjuntos, no âmbito fuzzy todo subconjunto A de X possui as propriedades

a) $A \cap \bar{A} \neq \phi$

b) $A \cup \bar{A} \neq X$.

Estes fatos, neste novo contexto, não deve aparecer como surpreendentes já que se o conjunto fuzzy A não possui fronteiras bem definidas então é claro que o conjunto fuzzy de A, $\bar{A}$ tampouco as terá. É natural então pensar que A e $\bar{A}$ se interceptem. Mas esta interseção será sempre limitada já que para todo $A \subset X$, A conjunto fuzzy.

$$K = A \cap \bar{A}, \text{ sse, } \mu_K(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_{\bar{A}}(x)$$
$$= \inf \{\mu_A(x) \,;\, 1 - \mu_A(x)\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\mu_A(x) \wedge \mu_{\bar{A}}(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

para todo $x \in X$.

Pela mesma razão, $A \cup \bar{A} \neq X$, para todo conjunto fuzzy A em X, pois

$$J = A \cup \bar{A}, \text{ sse, } \mu_J(x) = \mu_A(x) \vee \mu_{\bar{A}}(x)$$
$$= \sup \{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\mu_A(x) \vee \mu_{\bar{A}}(x) \geqslant \frac{1}{2},$$

para todo $x \in X$.

Digamos por exemplo, que se X representa as 24 horas do dia e A é o subconjunto das horas de escuridão, então $\mu_A(x)$ mede o grau de escuridão da hora x. Consequentemente é claro que existem horas tanto ao amanhecer como ao entardecer, em que $\mu_A(x)$ está próximo de 1/2 (ou seja as horas em que não está nem escuro nem claro) e, portanto essas horas estão perto de pertencer tanto a A como a $\bar{A}$.

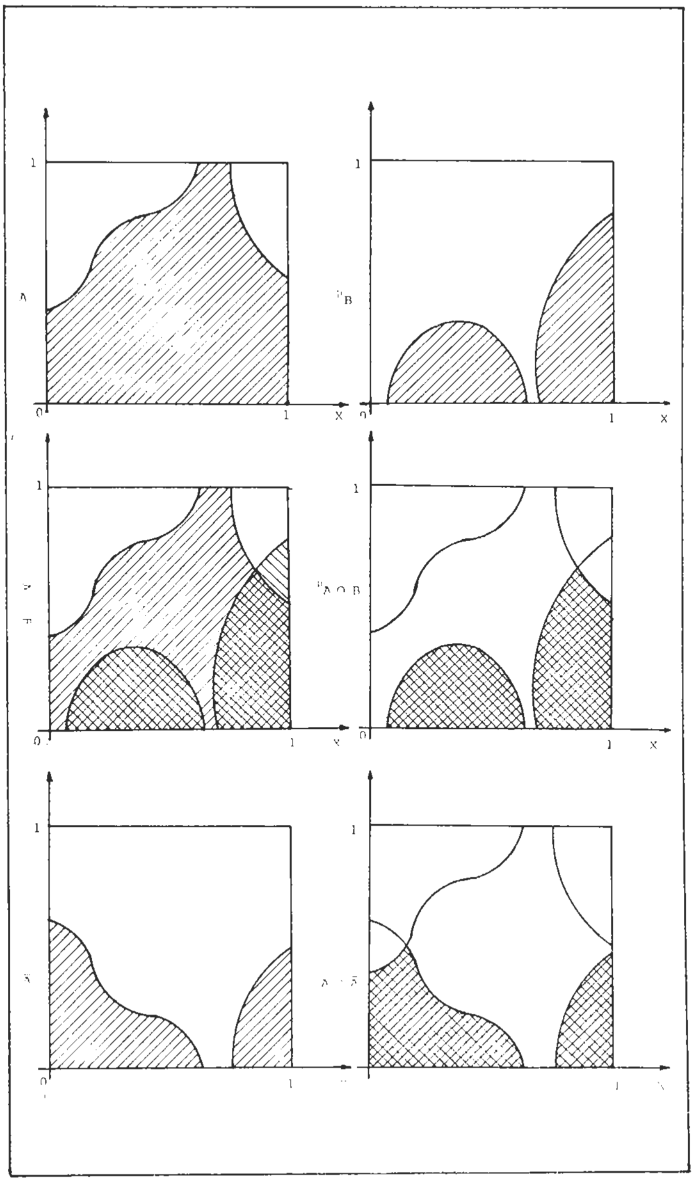
NOTA: Fora dessas operações de conjuntos fuzzy, existem outras operações tais como as operações análogas às operações de produto e soma probabilísticas, as operações de soma limitada, etc., (6, 15, 4) que não serão vistas aqui já que escapa ao propósito de difusão básica que tem este artigo.

4. DIAGRAMAS DE VENN PARA CONJUNTOS FUZZY

É claro que os diagramas de Venn, usados para representar conjuntos clássicos, já não podem ser usados para representar conjuntos fuzzy dado que estes últimos não possuem fronteiras bem definidas. Entretanto, ZADEH[11] e KAUFMANN[7] aproveitam convenientemente os gráficos das funções de pertinência para visualizar graficamente os operadores da teoria de conjuntos fuzzy.

O princípio geral para obter estes gráficos é o de superpor as funções de pertinência e, segundo seja a operação considerada, tomar o supremo, ínfimo, etc...

A título de exemplo consideremos os seguintes conjuntos fuzzy $A \subset X$, $B \subset X$ com $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ respectivamente suas funções de pertinência associadas.



Finalmente, digamos que sobre o conceito de fuzzyness na teoria fuzzy (o correspondente a randomness na teoria de probabilidades) existe outra interpretação dada por SUGENO[9] que se refere principalmente a tratar de quantificar o grau de subjetividade (grau de fuzzyness) implícito no fato de dar, a priori, um elemento do qual só se conhece informações vagas (fuzzy) e saber se tal elemento pertence ou não a um subconjunto A de X. Isto dá origem à Teoria de medida e integral fuzzy, tema que está sendo abordado no projeto de pesquisa "Conceitos e Resultados Fundamentais sobre Medida e Integral Fuzzy, sua Comparação com a Medida e Integral de Lebesgue e Teoria das Possibilidades" do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Londrina pelos autores deste trabalho e que será motivo de próximas publicações, com o objetivo de difundir esta outra parte da Teoria Matemática Fuzzy.

ABSTRACT

This work discusses basic information about fundamental concepts in the theory of fuzzy sets, and presents a new view point of things existing in various specific studies in the areas of topology, vector space measurement and integration, statistics, etc. The objectives were: 1. Compare these new concepts with tradicional ones in the classical theory of sets and 2. Try, in the teaching form, to interpret this matematical model which reflects, in a clearer way, on human behavior.

KEY-WORDS: *Mathematical model; Fuzzy sets.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. AIZERMAN, M. A. Some Unsolved Problems in The Theory of Automatic Control and Fuzzy Proofs. *IEEE Trans. Autom. Control, 22*:116-118, 1977.

02. BELLMAN, R. E. &GIERTZ M. On The Analytic Formalism of Tae Theory of Fuzzy Sets. *Inf. Sci.*, 5:149-157, 1973.

03. CHRISTOPH, F. T. Quotint Fuzzy Topology and Local Compactness *J. Math. Anal. App., 57:* 497-504, 1977.

04. DUBOIS, D.; PRADE, H. Fuzzy Sets And Systems: Theory and Applications. *Mathematics on Science and Engineering, 144,* 1980.

05. FUNG. L. W.; FU, K. S. An Axiomatic Approach to Rational Decision-making in a Fuzzy Environment. In: *Fuzzy Sets and Their Application to Cognitive and Decision Processes.* N. Y., Academic Press, 1975. p. 227-256.

06. GILES, R. Lukasiewcz Logic and Fuzzi Theory. *Inst. J. Math, Mech, Stud., 8*:313-327, 1976.

07. KAUFMANN, A. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets.* N. Y., Academic Press, 1975 v. 1

08. NEGOITIA, C. V.; RALESCU, D. A. Applications of Fuzzi Sets to Systems Analysis, ISR, 11, BIRKHAUSER VERLAG BASEL, Basel, 1975.

09. SUGENO, M. Theory of Fuzzy Integrals an its Applications. Ph.D. Thesis, Tokyo, 1974.

10. SUGENO, M.; TERANO, T. A Model of Learning Based on Fuzzy Information. Progress in Cybernetics and Systems Research. N. Y., J. Wiley and Sons, 1978. v. 3

11. ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Inform. Contr., 8,* 338-353, 1965.

12. ZADEH, L. A. Towards a Theory of Fuzzy Systems. NASA Contractor Report CR-1432. Berkeley University, at Califórnia, 1969.

13. ZADEH, L. A. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Posibility *Int. J. Fuzzy Sets Syst., 1*(1):3-28, 1978.

14. ZADEH, L. A. A Fuzzy Set Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. *J. Cybern., 2*(3):4-34, 1972.

15. ZADEH, L. A. *Calculus of Fuzzy Restrictions In:* Fuzzy Sets and Their Application to Cognitive and Decision Processes. N. Y., Academic Press, 1975 p. 1-39

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos professores: Cleusa Rocha Asanome (DMAP-UEL) pela confecção dos gráficos; Antonio Fernando Prado de Andrade (DMAT-UEL) por haver sugerido a investigação nesta área de pesquisa; Rodney Carlos Bassanezi (UNICAMP) pela coordenação geral do projeto de pesquisa que gerou este trabalho.