ANÁLISE ITERATIVA DAS EQUAÇÕES DOS TRÊS MOMENTOS

JOSÉ AUGUSTO DE QUEIROZ[a]

RESUMO

No presente estudo propõe-se a solução das "equações dos três momentos" para o cálculo de sistemas contínuos a serem identificados como vigas contínuas, por processo iterativo.

PALAVRAS-CHAVE: *Equações dos três Momentos, Iteração.*

1. INTRODUÇÃO

As equações dos três momentos, cujas variáveis incógnitas representam esses esforços internos solicitantes, geram equações cuja matriz dos coeficientes, tem predominância evidente da diagonal. Pode-se, portanto, resolver o sistema de equações por um processo iterativo, através da determinação de coeficientes que dependem das condições geométricas e físicas das diversas barras que compõem a viga contínua, e por uma parcela função do carregamento, posição deste e das condições físicas e geométricas da barra em que atuam.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. Fixam-se aqui as seguintes identificações:

M_n = incógnita hiperestática (momento fletor)

μ_o = termo independente ou momento primário

l_n = comprimento da barra entre os apoios

J_{ik} = momento de inércia da barra i-K,

i = extremidade esquerda ou inferior da barra

k = extremidade direita ou superior da barra,

l'_n = comprimento elástico (reduzido) da barra,

K_{0ik} = Termo de carga dos esforços externos solicitantes, referido à extremidade i de uma barra qualquer,

K_{0ki} = Termo de carga dos esforços externos solicitantes, referido à extremídade K de uma barra qualquer,

T_{ik} = coeficiente de transmissão da extremidade i para a extremidade k da mesma barra,

T_{ki} = coeficiente de transmissão da extremidade k para a extremidade i da mesma barra,

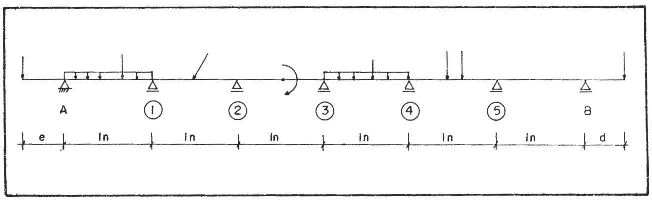
M_{on} = elemento de momento (parcela), função do carregamento e posição deste na barra,

E_{ki} = módulo de elasticidade do material de que se compõe a barra k-i,

J_b = momento de inércia da secção básica.

2.2. As equações dos três momentos são aplicáveis na solução dos esforços internos solicitantes (determinação desses esforços) em uma viga contínua, ou em um sistema estrutural identificado como tal.

2.2.1. Sabe-se que, se o material for o mesmo ao longo de toda a viga, bem como o momento de inércia das diversas secções das barras, o comprimento elástico das barras poderá ser confundido com o seu próprio comprimento. No caso do exemplo abaixo.



O sistema de equações que resolve os momentos fletores nos apoios será :

$$\ell_{1A}M_A + 2(\ell_{1A} + \ell_{12})M_1 + \ell_{12}M_2 = -K_{01A} - K_{012}$$
$$\ell_{21}M_1 + 2(\ell_{21} + \ell_{23})M_2 + \ell_{23}M_3 = -K_{021} - K_{023}$$
$$\ell_{32}M_2 + 2(\ell_{31} + \ell_{34})M_3 + \ell_{34}M_4 = -K_{032} - K_{034}$$
$$\ell_{43}M_3 + 2(\ell_{43} + \ell_{45})M_4 + \ell_{45}M_5 = -K_{043} - K_{045}$$
$$\ell_{54}M_4 + 2(\ell_{54} + \ell_{5B})M_5 + \ell_{5B}M_B = -K_{054} - K_{05B}$$

OBS.: O exemplo elucida a solução de uma viga contínua para qualquer número de vão, basta assim considerar.

Numa análise da matriz dos coeficientes do sistema de equações acima, verifica-se que há uma predominância nítida dos termos da diagonal.

[a] Departamento de Estruturas, CTU/UEL.

$$\begin{bmatrix} 2(\ell_{1A}+\ell_{12}) & \ell_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 2(\ell_{21}+\ell_{23}) & \ell_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 2(\ell_{32}+\ell_{34}) & \ell_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{43} & 2(\ell_{43}+\ell_{45}) & \ell_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \ell_{54} & 2(\ell_{54}+\ell_{5B}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{01A}-K_{012}-\ell_{1A}M_A \\ -K_{021}-K_{023} \\ -K_{032}-K_{034} \\ -K_{043}-K_{045} \\ -K_{054}-K_{05B}-\ell_{5B}M_B \end{bmatrix}$$

Voltando-se ao sistema de equações, tomando-se como valores iniciais das incógnitas, em primeira iteração:

$$M_1' = \frac{-K_{01A}-K_{012}-\ell_{1A}M_A}{2(\ell_{1A}+\ell_{12})}$$

$$M_2' = \frac{-K_{021}-K_{023}}{2(\ell_{21}+\ell_{23})} - M_1' \frac{\ell_{21}}{2(\ell_{21}+\ell_{23})}$$

$$M_3' = -\frac{K_{032}-K_{034}}{2(\ell_{32}+\ell_{34})} - M_2' \frac{\ell_{32}}{2(\ell_{32}+\ell_{34})}$$

$$\cdots$$

$$M_5' = \frac{-K_{054}-K_{05B}-\ell_{6B}}{2(\ell_{54}+\ell_{5B})} - M_4' \frac{\ell_{54}}{2(\ell_{54}+\ell_{5B})}$$

Agora, fazendo-se a iteração de B, 5, . . . A, tem-se

$$M_4'' = \frac{-K_{043}-K_{045}}{2(\ell_{43}+\ell_{45})} - M_3' \frac{\ell_{43}}{2(\ell_{43}+\ell_{45})} - M_5' \frac{\ell_{45}}{2(\ell_{43}+\ell_{45})}$$

$$\cdots$$

$$M_1'' = \frac{-K_{01A}-K_{012}-\ell_{1A}M_A}{2(\ell_{1A}+\ell_{12})} - M_2'' \frac{\ell_{12}}{2(\ell_{1A}+\ell_{12})}$$

Fazendo-se

$$\mu_{0A12} = \frac{K_{01A}+K_{012}+\ell_{1A}M_A}{2(\ell_{1A}+\ell_{23})}$$

$$\mu_{0123} = \frac{K_{021}+K_{023}}{2(\ell_{21}+\ell_{23})}$$

que são os termos independentes, ou momentos primários, e

$$T_{12} = \frac{\ell_{21}}{2(\ell_{21}+\ell_{23})}, \qquad T_{21} = \frac{\ell_{12}}{2(\ell_{12}+\ell_{1A})}$$

$$T_{23} = \frac{\ell_{32}}{2(\ell_{32}+\ell_{34})}, \qquad T_{32} = \frac{\ell_{23}}{2(\ell_{23}+\ell_{21})}$$

e assim os demais.

Pode-se escrever, fazendo-se a iteração de A para B

$$M_1' = -\mu_{0A12}$$

$$M_2' = -\mu_{0123} - T_{12} M_1'$$

$$\cdots$$

$$M_5' = -\mu_{045B} - T_{45} M_4'$$

No sentido inverso ou seja de B para A.

$$M_4'' = -\mu_{0345} - T_{54} M_5' - T_{34} M_3'$$

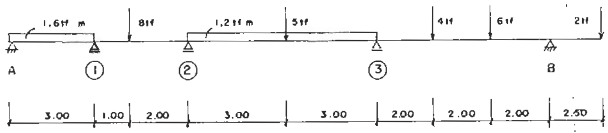
$$M_3'' = -\mu_{0234} - T_{23} M_3' - T_{43} M_4''$$

$$M_2'' = -\mu_{0123} - T_{12} M_1' - T_{32} M_3''$$

$$M_1'' = -\mu_{0A12} - T_{21} M_2''$$

e assim sucessivamente, até $M_n^{(I)} \simeq M_n^{(I+1)}$

2.3 Exemplo I – Determinar os momentos fletores sobre os apoios da viga contínua esquematizada, supondo J e E constantes ao longo de toda a viga



Determina-se os termos da carga.

$$M_A = 0$$

$$K_{01A} = \frac{q_1 \ell_{1A}^3}{4} = \frac{1.6 \times 3^3}{4} = 10,8$$

$$K_{012} = \frac{P_{21}\ b_{21}(\ell_{21}^2-b_{21}^2)}{\ell_{21}} \quad \frac{8 \times 2(9-4)}{3} = 26,7$$

$$K_{021} = \frac{P_{21} a_{21}(\ell_{21}^3-a_{21}^2)}{\ell_{21}} = \frac{8 \times 1(9-1)}{3} = 21,33$$

$$K_{023} = \frac{q_{23} \times \ell_{23}^3}{4} + \frac{P_{32}(\ell_{32}^2-b_{32}^2)b_{32}}{\ell_{32}} = \frac{1.2 \times 6^3}{4} + \frac{5 \times 3(36-9)}{6} = 132,30$$

$$K_{03B} = \frac{P_{41}b_{41}(\ell_{4B}^2-b_{41}^2)}{\ell_{4B}} + \frac{P_{42}b_{42}(\ell_{4B}^2-b_{42}^2)}{\ell_{4B}} = \frac{4 \times 4(36-16)}{6} + \frac{6 \times 2(36-4)}{6} = 117,33$$

A solução será dada pelo produto matricial

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 37,50 \\ -\ 153,63 \\ -\ (219,63 \end{bmatrix}^t$$

resultando, $M_1 = -\ 1{,}705$ tfm, $M_2 = -\ 5{,}68$ tfm, $M_3 = -\ 7{,}73$ tfm.

No processo iterativo se solucionará o problema com o seguinte encaminhamento:

$$\mu_{0A12} = \frac{K_{012} + K_{01A} + \ell_{1A} M_A}{2(\ell_{1A} + \ell_{12})} = \frac{37.5}{2(3+3)} = 3{,}125$$

$$\mu_{0123} = \frac{K_{021} + K_{023}}{2(\ell_{21} + \ell_{23})} = \frac{153{,}63}{2(3+6)} = 8{,}555$$

$$\mu_{023B} = \frac{K_{032} + K_{03B} + \ell_{3B} M_B}{2(\ell_{32} + \ell_{3B})} = \frac{249{,}63 + 6(-5)}{2(6+6)} = -\ 9{,}150$$

que são os termos independentes ou momentos primários, e determinando os coeficientes de transmissão

$$T_{12} = \frac{\ell_{12}}{2(\ell_{21} + \ell_{23})} = \frac{3}{2(3+6)} = 0{,}167$$

$$T_{21} = \frac{\ell_{21}}{2(\ell_{1A} + \ell_{12})} = \frac{3}{2(3+3)} = 0{,}250$$

$$T_{23} = \frac{\ell_{23}}{2(\ell_{32} + \ell_{3B})} = \frac{6}{2(6+6)} = 0{,}250$$

$$T_{32} = \frac{\ell_{32}}{2(\ell_{23} + \ell_{21})} = \frac{6}{2(6+3)} = 0{,}333$$

Fazendo a iteração sobre a estrutura, tem-se

$-T_{12} = -\ 0{,}167 \rightarrow$ $\qquad -T_{23} = -\ 0{,}250 \rightarrow$

$-T_{21} = -\ 0{,}250 \leftarrow$ $\qquad -T_{32} = -\ 0{,}330 \leftarrow$

	$-\mu_{0A12}$		$-\mu_{0123}$		$-\mu_{023B}$		
	-3,125		-8,555		-9,150		
Δ A	Δ 1		Δ 2		Δ 3		Δ B
	- 3,125	→	+ 0,520				
			- 8,035	→	+ 2,01		
			+ 2,38	←	- 7,14		
	+ 1,41	←	- 5,655				
	- 1,715	→	+ 0,29				
			- 5,880	→	+ 1,47		
			+ 2,56	←	- 7,68		
	+ 1,43	←	- 5,70				
	- 1,695	→	+ 0,28				
			- 5,71	→	+ 1,43		
			+ 2,57	←	- 7,72		
			- 5,70				

Tem-se como resultados do processo iterativo:

$M_1 = -\ 1{,}695$ tfm $\quad M_2 = -\ 5{,}70$ tfm $\quad M_3 = -\ 7{,}72$ tfm

que, comparados aos resultados "exatos", praticamente não há diferença:

a) É interessante observar, que estando corretos os valores dos coeficientes T_{ik} e T_{ki} e μ_{oijk}, pode-se errar durante a iteração que se chegará ao resultado correto.
b) Os termos de carga K_{oik} ou K_{oki}, são iguais a soma dos fatores de carga de 1ª espécie, multiplicados por 6(seis) nos tramos l_{ik} e l_{ki} respectivamente, portanto não há necessidade de se ter uma tabela de termos de carga especial.
c) No caso de engastamento de extremidade, se fará $l_{1A}=0$ se o engastamento for em 1 e $\ell_{5B}=0$ se o engastamento for em 5.
d) Os esforços (momentos fletores nos apoios) são obtidos de uma maneira direta.
e) A convergência aos valores finais é rápida.

2.4. No caso do módulo de elasticidade e momento de inércias das secções variarem ao longo da vida contínua, tomando-se a mesma viga com as características de carga do exemplo anterior, tem-se, para E e J constantes nas barras:

$$\ell'_{1A}M_A + 2(\ell'_{1A}+\ell'_{12})M_1 + \ell'_{12}M_2 = -K_{01A} \times \frac{\ell'_{1A}}{\ell_{1A}} - K_{012}\frac{\ell'_{12}}{\ell_{12}}$$

$$\ell'_{21}M_1 + 2(\ell'_{21}+\ell'_{23})M_2 + \ell'_{23}M_3 = -K_{021}\frac{\ell'_{21}}{\ell_{23}} - K_{023}\frac{\ell'_{23}}{\ell_{23}}$$

$$\ell'_{32}M_2 + 2(\ell'_{32}+\ell'_{34})M_3 + \ell'_{34}M_4 = -K_{032}\frac{\ell'_{32}}{\ell_{32}} - K_{034}\frac{\ell'_{34}}{\ell_{34}}$$

$$\ell'_{43}M_3 + 2(\ell'_{43}+\ell'_{45})M_4 + \ell'_{45}M_5 = -K_{043}\frac{\ell'_{43}}{\ell_{43}} - K_{045}\frac{\ell'_{45}}{\ell_{45}}$$

$$\ell'_{54}M_4 + 2(\ell'_{54}+\ell'_{5B})M_5 + \ell'_{5B}M_B = -K_{054}\frac{\ell'_{54}}{\ell_{54}} - K_{05B}\frac{\ell'_{5B}}{\ell_{5B}}$$

Fazendo:

$$C_{01A} = K_{01A}\cdot\frac{\ell'_{1A}}{\ell_{1A}} \qquad C_{012} = K_{012}\frac{\ell'_{12}}{\ell_{12}} \qquad C_{05B} = K_{05B}\frac{\ell'_{5B}}{\ell_{5B}}$$

$$C_{01A} = K_{01A} \times \lambda_1 \qquad C_{012} = K_{012} \times \lambda_2 \qquad C_{05B} = K_{05B} \times \lambda_6$$

sendo: $\lambda_{ki} = \dfrac{J_b}{J_{ki}}$ tem-se;

$$\ell'_{1A}M_A + 2(\ell'_{1A}+\ell'_{12})M_1 + \ell'_{12}M_2 = -C_{01A} - C_{012}$$

$$\dots$$

$$\ell'_{54}M_4 + 2(\ell'_{54}+\ell'_{5B})M_5 + \ell'_{5B}M_B = -C_{054} - C_{05B}$$

Montando a matriz λ_{ki}, verifica-se que a predominância da diagonal continua evidente, assim:

$$M'_1 = \frac{-C_{01A} - C_{012} - \ell'_{1A}M_A}{2(\ell'_{1A} + \ell'_{12})}$$

Chegaremos a forma mais simples:

$$M'_1 = \mu_{0A12}$$

$$M'_2 = \mu_{0123} - T_{12} \times M'_1$$

$$\dots$$

$$M'_5 = -\mu_{045B} - T_{45}M'_4$$

no sentido inverso

$$M''_4 = -\mu_{0345} - T_{34}M'_3 - T_{54}M'_5$$

$$M''_3 = -\mu_{0234} - T_{23}M'_2 - T_{43}M''_4$$

$$\dots$$

$$M''_1 = -\mu_{0A12} - T_{21} \times M''_2$$

e assim sucessivamente até $M_n^{(I)} \simeq M_n^{(I+1)}$

2.5. Exemplo: Toma-se o caso da viga do exercício anterior e fazendo $J_{1A} = 1$, $J_{21} = 1$, $J_{23} = 2$ e $J_{3B} = 2$.

I – Fazendo $J_b = J_{1A}$, tem-se:

$$\lambda_{1A} = 1 = \frac{1}{1}, \quad \lambda_{21} = 1 = \frac{1}{1}, \quad \lambda_{23} = 0,5 = \frac{1}{2} \text{ e } \lambda_{3B} = 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$\ell'_{1A} = 3, \quad \ell'_{23} = 3, \quad \ell'_{34} = 3 \text{ e } \ell'_{4B} = 3$$

Determinam-se os termos independentes,

$$-K_{01A} \times \lambda_1 - K_{012} \times \lambda_2 - \ell'_{1A}M_A = -10,8 - 26,7 \times 1 - 0 - 37,300$$

$$-K_{021} \times \lambda_2 - K_{023} \times \lambda_3 = -21,33 \times 1 - 132,3 \times 0,5 - -87,480$$

$$-K_{032} \times \lambda_3 - K_{03B} \times \lambda_4 - \ell'_4 \times M_B =$$

$$- -132,3 \times 0,5 - 117,33 \times 0,5 + .3 \times 5 = -109,815$$

O produto matricial que representa o sistema de equações que determina a incógnita será:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37,300 \\ -87,480 \\ -109,815 \end{bmatrix}^t$$

resolvendo tem-se os seguintes valores em unidades de momento:

$$M_1 = -1,919 \quad M_2 = -4,824 \text{ e } M_3 = -7,945$$

II – Para uso do processo iterativo, calculando os coeficientes de transmissão.

$$T'_{12} = \frac{\ell'_{21}}{2(\ell'_{21} + \ell'_{23})} = \frac{3}{2(3+3)} = 0,25, \qquad T_{23} = \frac{\ell'_{32}}{2(\ell'_{32} + \ell'_{34})} = \frac{3}{2(3+3)} = 0,\text{[illegible]}$$

$$T_{32} = \frac{\ell'_{23}}{2(\ell'_{23} + \ell'_{21})} = \frac{3}{2(3+3)} = 0,25, \qquad T_{21} = \frac{\ell'_{12}}{2(\ell'_{12} + \ell'_{1A})} = \frac{3}{2(3+3)} = 0,\text{[illegible]}$$

os termos independentes serão:

$$-\mu_{0A12} = \frac{-C_{01A} - C_{012} - \ell'_{1A} M_A}{2(\ell'_{1A} + \ell'_{12})} = \frac{-37,5}{2(3+3)} = -3,125$$

$$-\mu_{0123} = \frac{-C_{021} - C_{023}}{2(\ell'_{21} + \ell'_{23})} = \frac{-87,48}{2(3+3)} = -7,290$$

$$-\mu_{023B} = \frac{-C_{032} - C_{03B} - \ell'_{3B} M_B}{2(\ell'_{32} + \ell'_{34})} = -\frac{109,815}{2(3+3)} = -9,150$$

sobre o esquema da estrutura monta-se o dispositivo onde se processa a iteração:

	-0,25 →		-0,25 →	
μ_{0A12}	← -0,25	μ_{0123}	← -0,25	μ_{023B}
- 3,125		- 7,290		- 9,150
Δ		Δ		Δ
- 3,125	→	+ 0,803		
		- 6,487	→	+ 1,85
		+ 1,825	←	- 7,30
+ 1,166	←	- 4,662		
- 1,959	→	+ 0,490		
		- 4,975	→	+ 1,244
		+ 1,976	←	- 7,906
+ 1,206	←	- 4,824		
- 1,919	→	+ 0,480		
		- 4,834	→	- 1,208
		+ 1,986	←	7,942
+ 1,206	←	4,824		
- 1,919	→	+ 0,480		
		4,824	→	1,206
				7,944

e obtém os valores em unidades de momento

$M_1 = -1,919 \qquad M_2 = -4,824 \qquad$ e $\qquad M_3 = -7,944$

que praticamente coincidem com os resultados do processo exato.

As vantagens são as mesmas enumeradas anteriormente, quando da solução do problema com E e J constantes na estrutura.

ABSTRACT

The present study proposes solutions of "three moments equations" for continuous systems by identifing them as continuous beams by iterative process.

KEY-WORDS: *Three moments equations; iteration.*

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. LACERDA, F. S. *Resistência dos Materiais.* 2. ed. Porto Alegre, Livraria Globo, 1947.