ISSN: 0101-3742

O OPERADOR EVOLUÇÃO

ANTONIO FERNANDO PRADO DE ANDRADE *

RESUMO

Este trabalho não tem a pretensão nem de ser completo nem tampouco original. O objetivo foi apresentar, via o Operador Densidade, o Formalismo Matemática da Mecânica Quântica de maneira que o mesmo pudesse ser útil aqueles que se iniciam ao estudo deste campo do conhecimento. A vantagem de apresentar tal formalismo via o Operador Densidade reside em que o estado de um dado sistema, assim representado, estará definido de maneira única, enquanto que o Ket representando o estado dinâmico de um sistema, quando este é completamente conhecido, é quando muito definido, a menos de um fator de fase. Este trabalho tem única e exclusivamente finalidades didáticas.

1 – AS DESCRIÇÕES CLÁSSICA E QUÂNTICA DOS SISTEMAS FÍSICOS

Em Física Clássica o estado dinâmico de um dado sistema estará determinado em cada instante, desde que se conheça nesse intante os valores assumidos pelas variáveis dinâmicas associadas com o sistema. Essas variáveis dinâmicas podem, em princípio, serem todas elas determinadas simultâneamente com infinita precisão. O objetivo da teoria clássica é enumerar essas variáveis dinâmicas e então descobrir e estudar suas equações de movimento.

Em Física Quântica, a relação entre estados dinâmicos e variáveis dinâmicas é muito menos direta. No processo de medida de uma dada variável dinâmica, o estado dinâmico do sistema sobre o qual a medida é realizada, é em geral modificado pela intervenção do ato de medir. Existe na Mecânica Quântica uma grande controvérsia sobre como a gente deve entender a relação entre a coisa sendo medida e o aparelho. Essa modificação a qual é usualmente negligenciada em Física Clássica, deixa de ser neglilível na esclala microscópica e a mesma surge como uma não predictível e incontrolável perturbação do sistema e coloca um limite para a precisão com a qual as variáveis dinâmicas podem ser, todas elas, medidas simultaneamente. A Mecânica Quântica abandona o postulado fundamental da Física Clássica, de acordo com o qual todas as várias grandezas pertencentes ao sistema tomam valores bem definidos em cada instante de tempo. Desse modo, podemos sómente determinar para cada uma dessas variáveis, uma distribuição estatística de valores, a qual é a lei de probabilidade dos resultados de medida, na eventualidade que uma tal medida seja realizada; isto é, em princípio é impossível determinar todas as variáveis dinâmicas com precisão arbitrária.

Vemos assim que existe em Física Quântica uma mudança radical na relação entre estados dinâmicos e variáveis dinâmicas, em comparação com a Física Clássica. Isto exige naturalmente uma mudança radical na aparelhagem matemática dessa teoria.

2 – O FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA

A Mecânica Quântica, e de fato qualquer teoria[3], pode ser dividida em:

(a) – Um formalismo matemático consistindo de um conjunto de conceitos primitivos, relações entre esses conceitos os quais podem ser ou postulados ou obtidos por dadas regras de dedução, e uma lei dinâmica.

(b) – Regras de correspondências, as quais relacionam os conceitos teóricos de (a), com o mundo da experiência.

Esta divisão não é de forma alguma absoluta, mas ela é conveniente para os propósitos que temos em mente. Tratemos portanto de cada parte em separado.

(a) – Os conceitos primitivos da teoria quântica são aqueles de sistemas, estado e observável.

(F.1) – A cada sistema corresponde um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

(F.2) – Um estado é representado por um operador densidade $\hat{\rho}$, o qual é hermiteano, positivo definido e de traço unitário. Isto implica que qualquer operador estado $\hat{\rho}$ pode ser diagonalizado em termos dos seus autovetores $|\psi_n\rangle$

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \qquad (1),$$

com $0 \leqslant \rho_n \leqslant 1$ e $\sum_n \rho_n = 1$.

Um estado puro é caracterizado pela condição $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Segue-se que para um estado puro, existe extamente um autovalor não-nulo de $\hat{\rho}$, digamos

$\rho_n = 1$ e $\rho_{n'} = 0$ para $n \neq n'$.

Neste caso, temos

$$\hat{\rho} = |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \qquad (2)$$

e desse modo um estado puro pode ser representado por um vetor no espaço

*Departamento de Matemática Universidade Estadual de Londrina de Hilbert $\mathcal{H}$ do sistema.

(F.3) – Um observável A é representado por um operador hermiteano $\hat{A}$, atuando sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ dos sistema. Ele tem uma representação espectral

$$\hat{A}=\sum_n a_n \hat{P}_n$$

onde os $\hat{P}_n$ são os operadores projeção ortogonal, os quais relacionam-se aos autovetores ortonormais de $\hat{A}$ por

$$\hat{P}_n = \sum_a |a, a_n\rangle\langle a, a_n| \qquad (3).$$

Aqui os números a_n são os autovalores de $\hat{A}$ e o parâmetro a denota os autovalores degenerados os quais são associados ao mesmo autovalor de $\hat{A}$. As somas ficam integrais no caso de $\hat{A}$ ter um espectro contínuo.

A equação

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n$$

é equivalente a afirmação de que um observável deve possuir um conjunto ortogonal completo de autovetores, ou seja, uma base de autovetores.

(F.4) – O valor médio, ou média, de um observável $\hat{A}$ no estado $\hat{\rho}$ está dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = T_r\,(\hat{\rho}\hat{A}), \qquad (4)$$

onde T_r significa o traço do operador entre parentesis.

Para um estado puro representado pelo vetor normalizado $|\psi\rangle$, a expressão anterior (4) reduz-se a

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \qquad (5)$$

Introduzindo a função característica $f(\xi) = \langle e^{i\xi\hat{A}}\rangle$, podemos obter a distribuição estatística dos resultados do observável $\hat{A}$ no estado $\hat{\rho}$, uma vez que uma distribuição estatística de resultados fica completamente determinada pela especificação da função característica.

(F.5) – Os únicos resultados possíveis da medida de um observáel $\hat{A}$ são os seus autovalores, e as probabilidades de cada um dos seus autovalores a_n podem ser calculados da seguinte maneira:

No caso de um estado puro representado pelo Ket normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade do autovalor a_n de $\hat{A}$ está dada por:

$$\sum_a |\langle \psi | a, a_n\rangle|^2$$

que no caso não degenerado se reduz a

$$|\langle \psi | a_n\rangle|^2.$$

(F.6) – A lei dinâmica ou equação do movimento depende do sistema físico sob consideração; isto é, do número de graus de liberdade do sistema, se o sistema é relativistico ou não. Mas, em cada caso ela pode ser escrita na forma

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_o)\ \hat{\rho}(t_o)\ \hat{U}^{-1}(t, t_o) \qquad (6)$$

em geral,

ou

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o)\,|\psi(t_o)\rangle \qquad (7)$$

para um estado puro, onde $\hat{U}(t, t_o)$ é um operador unitário, chamado o operador evolução.

Temos dado essa forma, não uma axiomatização da mecânica quântica, mas meramente um resumo compacto do seu formalismo matemático, como ele existe no presente e na prática.

(b) – As regras de correspondência devem relacionar os conceitos primitivos de sistema, estado e observável à realidade empírica. Isto nos possibilita uma interpretação mais específica para as médias e probabilidades introduzidas em (F.4) e (F.5).

A exigência natural colocada sobre um observável, é que seremos capazes de observá-lo. Mas precisamente, um **observável** é uma variável dinâmica cujo valor pode, em princípio, ser medido. Para variáveis canonicamente conjugadas, os operadores correspondentes correspondentes são obtidos via a realção de comutação canônica de DIRAC

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = \hbar\ \hat{I}d.$$

Não existe regra geral para construir um único operador para reprsentar uma função $f(\hat{q}, \hat{p})$, em virtude da não-comutatividade de $\hat{q}$ e $\hat{p}$. Todavia o caso mais geral não parece surgir na prática.

Observação: Notemos que a axiomatização da Mecânica Quântica não nos dá uma maneira de encontrar o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que corresponde a um dado sistema físico, nem os operadores que correspondem aos observáveis físicos, nem o operador $\hat{H}$ que dá a evolução em tempo de dado sistema físico. Estas escolhas de $\mathcal{H}$, os operadores (observáveis) é $\hat{H}$ vêm da experiência via certas regras de correspondência entre Física Clássica e Física Quântica. Desta forma os axiomas nos garantem a **existência** de $\mathcal{H}$, os operadores (observáveis) e $\hat{H}$.

3 – O OPERADOR EVOLUÇÃO

Pelo que temos visto no parágrafo anterior, a evolução em tempo de um sistema quântico está dada no caso geral por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_o)\,\hat{\rho}(t_o)\,\hat{U}^{-1}(t, t_o) \qquad (6),$$

e por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o)\,|\psi(t_o)\rangle \qquad (7)$$

no caso de um estado puro; onde $\hat{U}(t, t_o) = \hat{U}$ é um operador unitário ou seja $\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I}d$ (em particular $\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}$).

Vamos admitir que o estado do sistema é perfeitamente bem conhecido, em um dado instante de tempo t_o, como $|\psi(t_o)\rangle$. Então de acordo com a equação (7), o seu estado $|\psi(t)\rangle$ em um tempo posterior, $t > t_o$, vem dado por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o)\ |\psi(t_o)\rangle.$$

Algumas propriedades decorrem imediatamente desta equação:

(1) – Para $t = t_o$ resulta que $|\psi(t_o)\rangle = \hat{U}(t_o, t_o)\,|\psi(t_o)\rangle$, e assim $\hat{U}(t, t_o)$ satisfaz à condição inicial.

$$\hat{U}(t_o, t_o) = \hat{I}d.$$

(2) – $\langle \psi(t) | \psi(t)\rangle = \langle \hat{U}(t, t_o)(\psi(t_o)) | \hat{U}(t, t_o)(\psi(t_o))\rangle = \langle \psi(t_o) | \hat{U}^*(t, t_o).\hat{U}(t, t_o)(\psi(t_o))\rangle = \langle \psi(t_o) | \psi(t_o)\rangle$, uma vez que $\hat{U}^*.\hat{U} = \hat{I}d$.

Esta propriedade nos diz que na evolução em tempo do sistema, a normalização do sistema não muda; isto é, se $\|\psi(t_o)\| = 1$, então $\|\psi(t)\| = 1$ em todos os instantes posteriores $(t > t_o)$.

(3) – Consideremos os instantes de tempo t, t_1, t_o e tais que $t > t_1 > t_o$. Em virtude da equação (7), podemos escrever:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_1)\,|\psi(t_1)\rangle$$
$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t_1, t_o)\ |\psi(t_o)\rangle$$

e desse modo resulta que

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_1)\,.\,\hat{U}(t_1, t_o)\,|\psi(t_o)\rangle.$$

Mas em virtude da equação (7)

$| \psi (t) \rangle = \hat{U}(t, t_o) | \psi (t_o) \rangle.$

Portanto, comparando as duas últimas equações resulta, já que $| \psi (t_o) \rangle$ é arbitrário:

$\hat{U}(t, t_o) = \hat{U}(t, t_1) . \hat{U}(t_1, t_o).$

Esta regra de composição do operador evolução é conhecida como a propriedade de semigrupo de $\hat{U}$.

Segue-se desta relação pondo $t = t_o$ que

$\hat{U}(t_o, t_1) . \hat{U}(t_1, t_o) = \hat{U}(t_o, t_o) = \hat{I}d$

ou seja

$\hat{U}(t_1, t_o) = \hat{U}^{-1}(t_o, t_1).$

Vamos a seguir determinar a equação diferencial a qual deve ser satisfeita pelo operador evolução.

Um operador unitário $\hat{U}$ diz-se um operador infinistesimal se

$\hat{U} \equiv \hat{I}d + i\epsilon\hat{F},$

onde ϵ é uma quantidade infinistesimal real. Dizemos então neste caso que $\hat{U}$ está infinitamente próximo à identidade.

Da condição de unitaridade de $\hat{U}$ ou seja de

$\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I}d,$

resulta que

$(\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^*) (\hat{I}d + i\epsilon\hat{F}) = \hat{I}d$

e em particular que

$(\hat{I}d + i\epsilon\hat{F}) (\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^*) = \hat{I}d$

ou desenvolvendo

$\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^* + i\epsilon\hat{F} + \epsilon^2\hat{F}\hat{F}^* = \hat{I}d.$

Desprezando o termo em ϵ^2 obtemos

$i\epsilon\hat{F} = i\epsilon\hat{F}^*$ e daí $\hat{F} = \hat{F}^*$.

Desse modo o operador $\hat{F}$ é hermiteano.

Consideremos agora um instante de tempo $t - dt$ imediatamente antes de t. Em virtude da propriedade de semigrupo do operador evolução $\hat{U}$, temos:

$\hat{U}(t, t_o) = \hat{U}(t, t - dt) . \hat{U}(t - dt, t_o).$

Agora, se dt é pequeno, então $\hat{U}(t, t - dt)$ é um operador unitário infinitesimal, e o intervalo de tempo $-dt$ é o seu parâmetro.

Assim, pelo que vimos antes $\hat{U}(t, t - dt) = \hat{I}d - \frac{i}{\hbar}$ ($\hbar$ = constante de Planck dividida por 2π) e o fator $\frac{1}{\hbar}$, tem sido introduzido, para que o operador $\hat{H}$ tenha dimensão de energia

Desse modo, obtemos

$$\hat{U}(t, t_o) = (\hat{I}d - \frac{i}{\hbar} dt \hat{H}) . \hat{U}(t - dt, t_o)$$

$$= \hat{U}(t - dt, t_o) - \frac{i}{\hbar} dt \hat{H} . \hat{U}(t - dt, t_o)$$

ou ainda

$$\frac{1}{dt} (\hat{U}(t, t_o) - \hat{U}(t - dt, t_o) =$$

$$= - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U}(t - dt, t_o).$$

Fazendo $dt \to 0$, encontraremos

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}(t, t_o) = \hat{H} \hat{U}(t, t_o)$$

que é a equação diferencial do operador evolução

Temos então o seguinte problema de valor inicial para o operador evolução

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_o) = \hat{H} \hat{U}(t, t_o)$$

$$\hat{U}(t_o, t_o) = \hat{I}d. \qquad (8)$$

Este problema de valor inicial pode ser transformado na forma equivalente

$$\hat{U}(t, t_o) = \hat{I}d - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^{t} \hat{H} \hat{U}(t', t_o)dt'. \quad (9)$$

As equações em (8) ou a equação integral em (9) expressam a lei fundamental da evolução de um sistema quantico, descrito por um estado puro $| \psi (t) \rangle$.

Consideremos agora o caso geral, no qual a evolução em tempo está dada por

$$\hat{\rho} (t) = \hat{U}(t, t_o) . \hat{\rho}(t_o) . \hat{U}^*(t, t_o).$$

Ora, as equações de movimento do operador $\hat{U}$ e do seu adjunto $\hat{U}^*$ estão dadas, respectivamente, por:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H} \hat{U} \qquad (10)$$

e

$$- i\hbar \frac{d\hat{U}^*}{dt} = \hat{U}^* \hat{H}^* \qquad (11)$$

Derivando com respeito a ~~membro~~ ~~a~~ equação

$\hat{\rho} (t) = \hat{U} \hat{\rho} (t_o) \hat{U}^*$;

encontramos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{\rho} (t_o) \hat{U}^* + \hat{U} \hat{\rho} (t_o) . \frac{d\hat{U}^*}{dt}.$$

Agora, levando-se em conta as equações (10 e (11), obtemos:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\hat{H}}{i}. \hat{U} \hat{\rho} (t_o) \hat{U}^* - \hat{U} . \hat{\rho} (t_o) . \hat{U} \frac{\hat{H}}{\hbar i}..$$

ou seja

$$i\hbar . \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \qquad (12)$$

Que é uma das formas da equação dinâmica da mecânica quântica

4 – AS REPRESENTAÇÃO DE DE SCHRODINGER E HEISENBERG

Como temos visto no parágrafo anterior, as equações

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}(t, t_o) = \hat{H} \hat{U}(t, t_o)$$

$$\qquad (13)$$

$$\hat{U}(t_o, t_o) = \hat{I}d$$

ou a equação integral

$$\hat{U}(t, t_o) = \hat{I}d - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^{t} \hat{H} \hat{U} (t', t_o)dt', \quad (14)$$

expressam a lei fundamental da evolução de um sistema quântico, descrito por um estado puro $| \psi (t) \rangle$.

Uma expressão equivalente desta lei é a equação **Schrödinger** ; ou seja, a equação diferencial do movimento dos estados dinâmicos do sistema.

Como sabemos, a evolução em tempo do vetor estado $| \psi (t) \rangle$ está dada por

$$| \psi (t) \rangle = \hat{U}(t, t_o) | \psi (t_o) \rangle.$$

Diferenciando com respeito a t membro a membro esta equação, obtemos:

$$\frac{d}{dt} | \psi (t) \rangle = \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_o) | \psi (t_o) \rangle \quad (15)$$

Mas,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_o) = \hat{H} \hat{U}(t, t_o).$$

Desse modo, resulta que

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi (t) \rangle = \hat{H} \hat{U}(t, t_o) . | \psi (t_o) \rangle =$$

$= \hat{H} \mid \psi (t) \rangle.$

A equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mid \psi (t) \rangle = \hat{H} \mid \psi (t) \rangle \qquad (16)$$

nos dá a lei geral para a evolução em tempo do estado $\mid \psi_S(t) \rangle$ do sistema. Ela é a forma de SCHRÖDINGER ou a equação de **SCHRÖDINGER** para o movimento do sistema.

Esse modo de descrever a evolução dos sistemas quânticos é conhecido como a representação de SCHRÖDINGER. Neste tipo de descrição dos fenômenos quânticos, o estado do sistema é representado por um Ket $\mid \psi (t) \rangle$ em movimento; enquanto que as grandezas físicas, ou pelo menos aquelas que não dependem explícitamente do tempo, são representadas por observáveis estacionários.

Podemos obter um modo de descrição do fenômeno que é equivalente ao anterior, realizando sobre os Kets e observáveis da representação de **SCHRÖDINGER**, uma transformação unitária, e associando às quantidades transformadas o mesmo significado físico daquelas de quem originaram-se. Em uma tal transformação, e já que o operador em consideração é unitário, os observáveis transformam-se em observáveis possuíndo o mesmo espectro de autovalores; os autovetores transformam-se em autovetores; as relações algébricas, as relações de conjugação e os produtos escalares são conservados. Desde que as únicas grandezas mensuráveis são modulos de produtos escalares, segue-se então que as predições feitas por meio das novas grandezas são idênticas àquelas feitas pelas grandezas das quais elas se originaram via a transformação unitária.

Convencionamos que nas grandezas envolvidas, um índice S indica que estamos na representação de **SCHRÖDINGER**, enquanto que um índice H, indica que estamos na nova representação, a qual chamamos de representação de **HEISENBERG**.

Pelo que tem sido dito antes, o ket

$$\mid \psi_S(t) \rangle = \hat{U}(t, t_o) \mid \psi_S(t_o) \rangle \qquad (17)$$

o qual representa o estado dinâmico do sistema no tempo, t é transformado no Ket

$$\mid \psi_H(t) \rangle = \hat{U}^{-1}(t, t_o) \mid \psi_S(t) \rangle,$$

o qual é **estacionário** (constante em tempo), pois

$$\mid \psi_H(t) \rangle = \hat{U}^{-1}(t, t_o) \,.\, \mid \psi_S(t) \rangle$$

$$= \hat{U}^{-1}(t, t_o) \,.\, \hat{U}(t, t_o) \mid \psi_S(t_o) \rangle$$

$$= \hat{U}(t_o, t) \,.\, \hat{U}(t, t_o) \mid \psi_S(t_o) \rangle$$

$$= \hat{U}(t_o, t_o) \,.\, \mid \psi_S(t_o) \rangle = \hat{I}d \mid \psi_S(t_o) \rangle$$

$$= \mid \psi_S(t_o) \rangle.$$

De modo similar, um observável $\hat{A}_S$ da representação de SCHRÖDINGER transforma-se em

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{-1}(t, t_o) \,.\, \hat{A}_S \hat{U}(t, t_o). \qquad (19)$$

Portanto, um observável que está inicialmente fixado, transforma-se um observável em movimento.

Assim, a transformação considerada nos conduz a uma nova representação do movimento, na qual os estados correspondem a Kets fixos e as variáveis dinâmicas a operadores lineares em movimento. Chamaremos a isto a representação de **HEISENBERG**.

Vamos a seguir obter na representação de HEISENBERG as equações do movimento para as variáveis dinâmicas.

Podemos reescrever a equação (19) como

$$\hat{U}(t, t_o) \,.\, \hat{A}_H(t) = \hat{A}_S \hat{U}(t, t_o), \qquad (20)$$

Diferenciando a equação (20) membro a membro com respeito a t, encontramos:

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_o) \,.\, \hat{A}_H(t) + \hat{U}(t, t_o) \qquad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \hat{A}_S \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_o),$$

desde que $\hat{A}_S$ não dependa explicitamente do tempo.

Levando-se em conta que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, T_o) = \hat{H} \hat{U}(t, t_o),$$

resulta que a equação (21) se escreve como:

$$\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}(t, t_o) \,.\, \hat{A}_H(t) + \hat{U}(t, t_o)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \hat{A}_S\left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}(t, t_o)\right),$$

ou ainda

$$\hat{U}(t, t_o)\left[i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t)\right] = \hat{A}_S \hat{H} \hat{U}(t, t_o) -$$

$$- \hat{H} \hat{U}(t, t_o) \hat{A}_H(t),$$

ou ainda

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \hat{U}^{-1}(t, t_o) \hat{A}_S \hat{U} \hat{U}(t, t_o) -$$

$$- \hat{U}^{-1}(t, t_o) \hat{H} \hat{U}(t, t_o) \hat{H} \hat{U}(t, t_o) \hat{A}_H(t)$$

$$= \hat{A}_H(t) \hat{H}_H(t, t_o) - \hat{H}_H(t, t_o) \,.\, \hat{A}_H(t), \qquad (22)$$

onde

$$\hat{H}_H(t, t_o) = \hat{U}^{-1}(t, t_o) \,.\, \hat{H} \hat{U}(t, t_o).$$

é o Hamiltoneado de HEISENBERG, para distingui-lo do ~~Hamiltoneado~~ de SCHRODINGER $\hat{H}$.

Em termos do comutador, a equação (22) se escreve como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t, t_o)] \qquad (23).$$

ABSTRACT

In this work we intend to develop the Mathematical Formalism of Non-Relativistic Quantum Mechanics in terms of two Basics Operators: Evolution Operator, and Density Operator and some of its properties. This article has didatic purposes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BALLENTINE, L.E. *Rev. Mod. Phys.*, *42*(4): 1970.

2. DIRAC, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics.* 4. ed. Oxford Univ. Press.

3. TISZA, L. *Rev. Mod. Phys.*, *35:* 1963.

4. VAN DER WAERDEN, B.L. *Sources of Quantum Mechanics.* Dover.