

ANÁLISE DE PÓRTICOS NO REGIME ELASTO-PLÁSTICO

CESAR BALLAROTTI* E HELENA M.C.C. ANTUNES**

RESUMO

Análises elasto-plásticas de pórticos, constituídos só de vigas e pilares, considerando-se a não linearidade física do material e geométrica da estrutura. Como resultados das análises pode-se ter: os esforços solicitantes nas barras, as relações carga-deslocamentos, a posição e ordem de formação das rótulas plásticas, a carga última e a causa da instabilidade da estrutura. São considerados, na análise, o efeito P-Delta, a redução do momento de plastificação, a alteração da rigidez devida aos esforços axiais e a reversão de rotação de rótulas plásticas.

1. INTRODUÇÃO

Com o advento de computadores eletrônicos e o desenvolvimento de técnicas matriciais, tornou-se viável desenvolver a análise de estruturas levando em conta efeitos diversos, na tentativa de reproduzir o seu comportamento real em qualquer nível de solicitação.

Muita atenção tem sido dada na obtenção de relações carga-deslocamento de pórticos planos de muitos andares, utilizados como painéis de contraventamento de estruturas tridimensionais de edifícios, considerando o comportamento não elástico do material. A maior dificuldade no tratamento desse tipo de estrutura, levando em conta um comportamento elasto-plástico para o material e efeitos de segunda ordem, se prende ao extensivo trabalho numérico só praticável em programas para computador.

O objetivo do trabalho ora apresentado é a formulação de um procedimento numérico e a elaboração de programas para computador para que se possa determinar as relações carga-deslocamento e analisar o fenômeno de instabilidade de pórticos planos, envolvendo a plastificação das seções e os efeitos de segunda ordem. Visa-se com isso obter ferramentas que viabilizem a análise numérica e conseqüentemente a compreensão do comportamento de pórticos planos quando se considera

a não linearidade do material e a influência de esforços axiais na flexão.

2. HIPÓTESES

a) Assume-se para o material um comportamento elasto-plástico ideal, desprezando o encruzamento, assumindo a tensão inicial de escoamento igual à final, assumindo uma reserva de deformação plástica infinita sem que haja ruptura, assumindo comportamento elástico na inversão de solicitação, e assumindo idêntico comportamento à tração e à compressão; com isso resulta o diagrama tensão-deformação esquematizado na Fig. 1

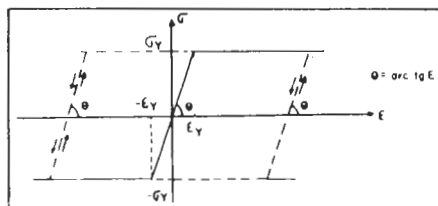


Figura 1 - Diagrama tensão-deformação; material elasto-plástico ideal com inversão de solicitação.

Um material estrutural que se enquadra à essas hipóteses é o aço laminado a quente.

b) As seções transversais planas permanecem planas na deformação, tanto em regime elástico como em regime plástico.

c) Será admitida a formação de rótulas plásticas à flexão e será desprezado o espalhamento da plastificação ao longo das barras; a plastificação será suposta restrita apenas às rótulas, tendo o resto das barras comportamento elástico.

d) Supõe-se assegurada a estabilidade de fora do plano do pórtico.

3. CARREGAMENTO

Serão consideradas cargas gravitacionais e cargas devidas à ação do vento, aplicadas aos nós do pórtico. De acordo com o procedimento numérico estabelecido para os parâmetros de carga, poderão ser parcialmente ou totalmente variáveis. Dessa forma, poderão se estabelecer carregamentos com vários tipos de variação e proporção entre os parâmetros de carga.

O carregamento é aplicado através de dois vetores de carga que são utilizados em duas fases distintas da análise. Numa primeira fase, a estrutura é carregada com os parâmetros do vetor de carga $\{P_f\}$ que, por sua vez, não deve provocar a plastificação de nenhuma seção das barras. Caso isso ocorra, o processo é interrompido e reiniciado com um $\{P_f\}$ menor. Com esse carregamento são determinados os esforços pela resolução do sistema de equações $Df = [K]^{-1} \cdot \{P_f\}$ e $\{E_f\} = [K] \cdot \{Df\}$ através do Processo dos Deslocamentos.

*Professor do Departamento de Engenharia Civil da UEL.

**Professora do Departamento de Estruturas da EESC-USP.

Numa segunda fase, a estrutura passa a ser carregada com os parâmetros do vetor de carga $\{P_v\}$, com o qual são determinados os esforços $\{E_v\} = [K'] \cdot \{D_v\}$. Nessa fase o procedimento passa a ser iterativo, na qual se considera a formação de rótulas e efeitos de segunda ordem. Devido a esses efeitos a matriz de rigidez tangente $[K']$ irá se alterando ao longo das iterações. A cada iteração é associada a formação de pelo menos uma rótula plástica, que no caso compõe as "etapas" dessa segunda fase.

Os incrementos de carga, com relação aos quais se verifica a formação das rótulas plásticas em cada etapa, são obtidos a partir dos fatores de carga ΔW_i . Esses fatores de carga são obtidos através dos esforços E_f , E_v e do momento de plastificação M_p relativos a uma mesma seção, através da relação $\Delta W_i = (M_p - E_f)/E_v$. Isto é feito para todas as seções das barras da estrutura nas quais esses esforços assumem valores extremos. Com os fatores ΔW_i , os incrementos de carga são calculados por $\Delta W_i \cdot \{P_v\}$.

O nível de carga, i.e., a carga acumulada a que fica submetida a estrutura, é obtida por.

$$\{P\} = \{P_f\} + \sum_{i=1}^m \Delta W_i \cdot \{P_v\},$$

sendo m o número correspondente à etapa atual na qual se encontra o processo de análise. De forma similar são calculados os deslocamentos acumulados da estrutura. Assim, vão sendo estabelecidos os respectivos níveis de carga e deslocamentos ao longo na análise.

4. ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA EM PRIMEIRA ORDEM

Uma análise baseada numa determinação etapa-por-etapa das relações carga-deslocamento onde rótulas e mais rótulas plásticas se formam é chamada análise elasto-plástica. Ao ser iniciada a análise, toda a estrutura comporta-se elasticamente até formarem-se as primeiras rótulas. A partir daí, as barras da estrutura continuam a se comportar elasticamente nos trechos entre rótulas, ou seja, nas seções onde o momento fletor é menor que o momento de plastificação da referida seção ($M < M_p$). Depois que determinadas rótulas plásticas se formaram a estrutura passa a reagir ao carregamento como se

existissem rótulas reais naquelas seções, incapazes de resistirem a adicionais momentos flatores, sendo que o momento naquelas seções permanece constante e igual a M_p .

O procedimento incremental adotado para computar os fatores de carga ΔW_i , numa análise elasto-plástica em 1a. ordem, é constituído pelos seguintes passos:

- a) Montagem da matriz de rigidez $[K]$ a partir da rigidez das barras, usando as características elásticas e geométricas da estrutura.
- b) Inversão da matriz de rigidez $[k]$ pelo método de Gauss-Jordan.
- c) Cálculo dos deslocamentos pelo sistema simultâneo de equações $\{D\} = [K]^{-1} \cdot \{P_f\}$. Com esses deslocamentos, calculam-se os esforços $\{E_f\}$ nas seções extremas das barras do pórtico.
- d) É verificado se, com os esforços $\{E_f\}$ ocorre plastificação nas seções das barras; em caso afirmativo, são reduzidos os parâmetros de carga do vetor $\{P_f\}$ e retorna-se ao passo (c).
- e) Com a matriz $[K]$ da etapa atual, calculam-se os deslocamentos e, com estes, os esforços $\{E_v\}$ devidos ao vetor de carga variável $\{P_v\}$.
- f) Com os momentos flatores dos parâmetros $\{E_v\}$ e $\{E_f\}$ e o momento de plastificação M_p calculam-se os fatores de carga ΔW_i .
- g) Determina-se o menor fator de carga ΔW_i , dentre os calculados no passo (f), que por sua vez se refere à formação da i -ésima rótula plástica. A menos de um "erro" pré-ficado de acordo com a precisão desejada, são determinados os "outros" pontos de plastificação (rótulas simultâneas).
- h) Calculam-se os esforços e deslocamentos acumulados que são atribuídos aos parâmetros $\{E_f\}$ e $\{D_f\}$.
- i) Calculam-se as rotações das rótulas com os esforços e deslocamentos do passo (h).
- j) A partir da terceira etapa verifica-se a possibilidade de reversão de rotação de rótula(s) plástica(s). Caso isso ocorra, altera-se a matriz de rigidez $[K]$, retorna-se ao passo (h), desacumulando-se os parâmetros E_f e D_f e, em seguida volta-se ao passo (e), repetindo-se essa etapa.
- 1) Altera-se a matriz de rigidez $[K]$ devido à formação de rótula(s) plástica(s) dessa etapa, que passa a ser matriz tangente $[K']$ a partir da primeira etapa.
- m) É verificado se a estrutura atingiu a instabilidade, averiguando-se o determinante da matriz de rigidez; caso

esse assuma valor menor ou igual a zero, admite-se que ocorreu o colapso plástico do pórtico, o que indica o fim da análise; caso o determinante seja maior que zero, retorna-se ao passo (e), dando prosseguimento à análise.

5. ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA EM SEGUNDA ORDEM

Uma estimativa mais precisa das relações carga-deslocamento, da capacidade última de carga e, também, do modo de colapso de pórticos é obtida por uma análise elasto-plástica em segunda ordem. De acordo com o comportamento real de barras e pórticos, a partir da aplicação dos primeiros incrementos de carga já se manifestam deslocamentos na estrutura. Com isso, ao ser iniciada a análise, tem-se um comportamento elástico da estrutura, com esses deslocamentos, gerando efeitos de segunda ordem. Devido a esses efeitos, as solicitações de flexão aumentam, antecipando a formação de rótulas plásticas. Assim, será estabelecido um procedimento que intercala efeitos de segunda ordem com a formação de rótulas plásticas, até que ocorra a instabilidade da estrutura.

Esse tipo de análise é, de certa forma, uma combinação de uma análise elasto-plástica em primeira ordem com uma análise elástica em segunda ordem.

Neste trabalho faz-se a análise de pórticos considerando-se os efeitos da plastificação de seções (rótulas plásticas), do esforço axial na rigidez dos pilares e na redução do momento de plastificação, dos deslocamentos horizontais dos nós (efeito P-Delta) e da reversão de rótulas plásticas. Entretanto, não são considerados os efeitos da tensão residual e do espalhamento da plastificação ao longo do eixo das barras.

O procedimento numérico incremental-iterativo adotado para computar os fatores de carga (ΔW_i), numa análise elasto-plástica em 2a. ordem, é constituído pelos seguintes passos:

- a) Montagem da matriz de rigidez $[K]$ a partir das matrizes de rigidez das barras com as características elásticas e geométricas da estrutura, considerada descarregada.
- b) Resolução do sistema de equações pelo método de Cholesky com o vetor de carga $\{P_f\}$.
- c) Com os deslocamentos calculados no passo (b), acima, determinam-se os esforços E_f com os quais é verificado

se há plastificação nas seções das barras; em caso afirmativo, faz-se a redução dos parâmetros de carga do vetor $\{P_f\}$, retornando-se ao passo (b); em caso negativo, passa-se ao passo (d).

d) Resolve-se o sistema de equações pelo método de Cholesky com o vetor de carga $\{P_v\}$ e calcula-se os esforços $\{E_v\}$. Se a matriz de rigidez deixou de ser positiva definida ou houve indeterminação na resolução do sistema de equações, admite-se que a estrutura atingiu a capacidade última de carga e a análise é finalizada.

e) Calcula-se o fator de carga ΔW_i referente à formação de rótula(s) plástica(s) com M_{pr} da etapa atual. Caso o esforço axial de algum pilar tenha atingido o valor da força de escoamento da seção ($F > F_y$), a análise é interrompida. Se o fator de carga ΔW_i for muito pequeno, a análise é finalizada sob a suposição de que a capacidade de carga última de carga da estrutura foi atingida.

f) Altera-se a matriz de rigidez tangente $[K']$ devido aos esforços axiais estimados pelo fator de carga ΔW_i .

g) Sendo a primeira etapa, são recalculados os esforços E_v e E_f ; a partir da segunda etapa, são recalculados apenas os esforços E_v .

h) Recalcula-se o fator de carga ΔW_i e testa-se a convergência com o fator do passo (e); se há convergência, passa-se para o passo (i) e, caso contrário, retorna-se ao passo (f).

i) Caso a convergência do passo (h) não seja alcançada com o número máximo de iterações pré-estabelecido, passa-se ao passo (j).

j) Determina-se a(s) rótula(s) plástica(s) simultânea(s), a menos de um "erro" pré-fixado de acordo com a precisão desejada na análise.

l) Calculam-se os esforços $\{E_f\}$ e os deslocamentos $\{D_f\}$ acumulados, através do fator ΔW_i da etapa atual.

m) Altera-se a matriz de rigidez tangente $[K']$ devido aos esforços axiais acumulados até a etapa atual. Caso algum pilar tenha atingido a carga crítica, a análise é interrompida.

n) Calculam-se as rotações das rótulas plásticas com os esforços $\{E_f\}$ e os deslocamentos $\{D_f\}$ do passo (l).

o) A partir da terceira etapa, verifica-se a possibilidade de reversão de rotação de rótula(s) plástica(s). Caso isso ocorra, altera-se a matriz de rigidez tangente $[K']$, desacumulaam-se os parâmetros $\{E_f\}$ e $\{D_f\}$ e retorna-se ao passo (d), repetindo-se essa etapa.

p) Altera-se a matriz de rigidez tangente $[K']$ devido à formação de rótula(s) plástica(s) dessa etapa. Retorna-se ao passo (d), dando prosseguimento à análise.

6. PROGRAMAS PARA COMPUTADOR.

Foram desenvolvidos dois programas, o PRGMI que fornece resultados da análise elasto-plástica em 1a. ordem e o PRGMII, em 2a ordem.

7. EXEMPLO

Nesta seção propõem-se a análise pelo PRGMI e PRGMII, de um pórtico cujas características elasto-geométricas e o carregamento são próximos das usuais.

As barras do pórtico, se constituem de perfis padrão americano, produzidos por Usina(s) Nacional(s).

Quanto ao carregamento que solici-

tará o pórtico, tem-se o seguinte: o carregamento gravitacional é considerado constante e o horizontal variando de um valor inicial até um valor último ao longo da análise, sendo este detectado automaticamente.

As características elásticas, geométricas e o carregamento são as que se apresentam a seguir.

Assim, para esse pórtico considera-se um material com $E = 2100 \text{ tf/cm}^2$, sendo que as barras se constituem em perfis I de aço carbono (ASTM A36) com $\sigma_y = 2,1 \text{ tf/cm}^2$.

Os dados geométricos são apresentados na Fig. 2(a) e na tabela 1.

Os carregamentos são apresentados na Fig. 2(b).

Os resultados obtidos estão na fig. 3.

A capacidade última de carga foi atingida tendo se desenvolvido mecanismos laterais tanto em primeira como em segunda ordem (PRGMI e PRGMII).

Fazendo-se comparações entre os resultados obtidos pelo PRGMI e pelo PRGMII, tem-se os seguintes valores:

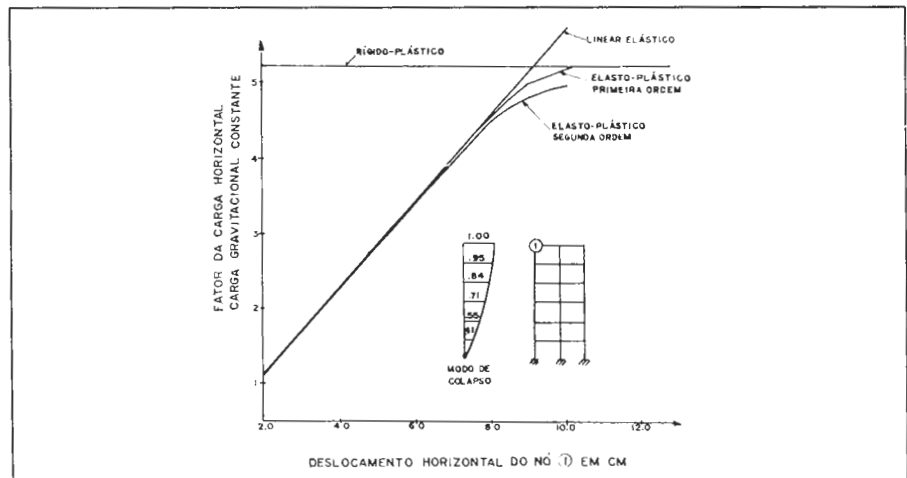


Figura 2 - Dados do pórtico.

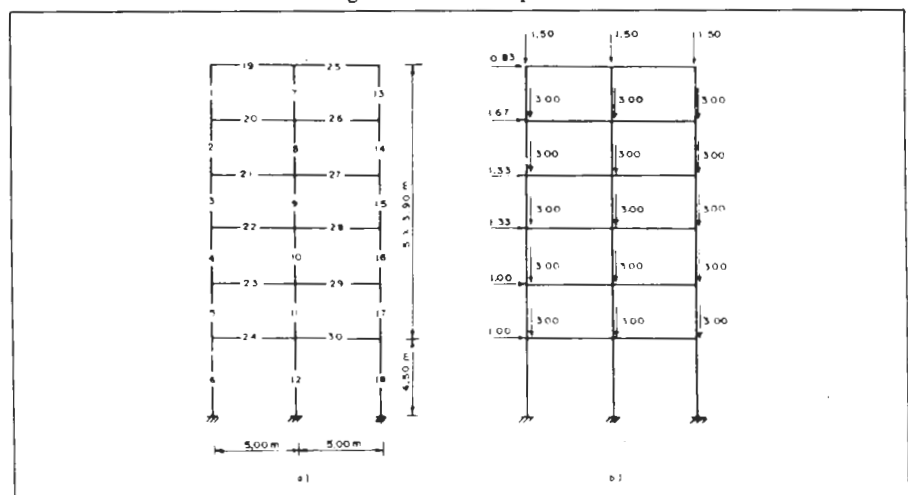


Figura 3 - Resultados obtidos pelo PRGMI e PRGMII.

TABELA 1

Fator de carga	PRGMI 5,24	PRGMII 4,94
Deslocamento horizontal	10,48	10,15cm

NÚMERO DAS BARRAS	PERFIL
1-2-7-8-13-14	I 12 x 74,4
3-4-15-16	I 12 x 81,8
21-22-27-28	I 12 x 81,4
5-6-9-10-17-18	I 15 x 63,3
11-12	I 15 x 66,5
19-20-25-26	I 15 x 73,9
23-29	I 20 x 121,2
24-30	I 20 x 126,6

8. CONCLUSÕES

Os programas PRGMI e PRGMII são viáveis para analisar os pórticos planos com carregamentos verticais e horizontais, fornecendo relações carga-deslocamento para qualquer combinação daqueles carregamentos, levando em conta efeitos não lineares quer físicos quer geométricos.

ABSTRACT

The aim of the present work is the elastic-plastic analysis of frames, made only beams and columns, taking into account the geometrical non-linearity of the structure and physical non-linearity of the material. As results from the analysis, it can be obtained, the internal forces in the members, load-displacement relations, position and sequence of appearing of plastic hinges, ultimate load and the cause of instability of the structure. The P-Delta effect, the reduction of moments in plasticification, the change of stiffness caused by axial forces in the columns and strain reversal of plastic hinges are taken into account in this analysis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTUNES, H.M.C.C. *Instabilidade elástica de estruturas lineares planas usuais*. São Carlos, EESC-USP, 1972. 101 p.
- GALAMBOS, T.V. *Structural members and frames*. Englewood Cliffs, 1968. Prentice-Hall. 373 p.
- HORNE, M.R. *Plastic theory of structures*. Great Britain, 1971. M.I.T. Press Edition. 173 p.
- LIAPUNOV, S. *Ultimate load studies of plane multistory steel rigid frames*. New York, 1973. 123 p. Thesis Structural Engineering. School of Engineering and Science of New York University.

O prefixo Δ indica uma quantia incremental.

- A = área da secção transversal de uma barra;
- Df = deslocamento devido ao carregamento constante;
- Dv = deslocamento devido ao carregamento variável;
- D = vetor deslocamento;
- E = módulo de elasticidade;
- Ef = esforço devido ao carregamento constante, em coordenadas locais;
- Ev = esforço devido ao carregamento variável, em coordenadas locais;
- F = esforço axial numa barra;
- Fy = esforço axial de escoamento de uma barra;
- [K] = matriz de rigidez da estrutura;
- [K'] = matriz de rigidez tangente da estrutura;
- M = momento fletor;
- Mp = momento de plastificação de uma barra;
- Mpr = momento de plasticiação de uma barra, reduzido pelo efeito do esforço axial;
- P = carga;
- Pf = carga aplicada constante;
- Pv = carga aplicada variável;
- Pf = vetor da carga constante;
- Pv = vetor da carga variável;
- ΔW_i = fator de carga da etapa "i";
- ϵ = deformação (cm/cm);
- ϵ_y = deformação de escoamento (cm/cm);
- σ = tensão (kgf/cm²);
- σ_y = tensão de escoamento.