OPERADORES DE FATORIZAÇAO NA FÍSICA MATEMÁTICA

MÁRIO GOTO[1]

GOTO, M. Operadores de Fatorização na Física Matemática. **Semina:** Ci. Exatas/Tecnol., Londrina, v. 14/15, n. 4, p. 365-374, dez. 1993/dez. 1994.

RESUMO: *Apresenta-se a aplicação dos operadores de fatorização para a resolução das principais equações diferenciais lineares de segunda ordem da Física Matemática como alternativa para o método de Frobenius. Em equações mais simples, a fatoração reduz a equação diferencial de segunda ordem a um par de equações diferenciais de primeira ordem, cada qual fornecendo uma das soluções linearmente independentes. Em outras, geralmente equações de auto-valores, os operadores de fatorização são identificados como operadores de levantamento e de abaixamento de índices, de modo que basta resolver a equação diferencial correspondente ao auto-valor de nível mais baixo, onde uma simples integração é suficiente. Verifica-se que a maioria das equações diferenciais comumente estudadas na Física Matemática podem ser fatoradas.*

PALAVRAS-CHAVE: *Equações diferenciais lineares; Operadores diferenciais; Operadores de fatorização.*

1 - INTRODUÇÃO

As leis da Física, quando possíveis, são preferencialmente formuladas através de equações matemáticas, em geral, sistemas de equações diferenciais parciais de segunda ordem. Em muitas aplicações, as variáveis podem ser separadas, originando um conjunto de equações diferenciais ordinárias (TIJONOV & SAMARSKY, 1972; BOYCE & DiPRIMA, 1965). Uma classe muito especial, e uma das principais matérias de estudo da Física-Matemática, são as equações diferenciais ordinárias, lineares, de segunda ordem, cuja forma geral é

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x), \quad (1)$$

ou, desde que $A(x) \neq 0$,

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x) . \quad (2)$$

onde

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad , \quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad etc..$$

Excetuando alguns casos mais simples, a técnica usual aplicada na resolução destas equações diferenciais é o método de Frobenius. As soluções definem as funções especiais da Física-Matemática (ARFKEN, 1966; BUTKOV, 1968).

Uma alternativa muito elegante e simples, e que nem sempre tem merecido a devida atenção, é o método da fatoração, ou fatorização. Em casos mais simples, a fatoração de uma equação deferencia! de segunda ordem resulta num par de equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções podem ser obtidas por integração direta. Em equações de auto-valores, a fatoração define operadores que atuam no levantamento e no abaixamento de índices das auto-funções, bastando, portanto, resolver a equação para o nível fundamental, por exemplo. Este procedimento é aplicado, principalmente, na Mecânica Quântica (DICKE & WITTKE, 1960; POWEL & CRASEMANN, 1961), servindo como modelo o oscilador harmônico simples, assim como os operadores de momento angular (GASIOROWICZ, 1974), e em aplicações mais recentes, na resolução de alguns sistemas quânticos mais complexos (KIMEL, 1982, GOTO, 1993), indicando também implicações teóricas mais profundas da Física teórica em modelos fatorizáveis (ALVES & DRIGO FILHO, 1988).

Possivelmente, nem todas as equações diferenciais de segunda ordem podem ser fatoradas, nem se conhecem regras precisas ou as condições necessárias para que as mesmas sejam fatoráveis, apesar de a idéia ser antiga e aparentemente simples, de certa maneira lembrando o método utilizado para a obtenção das raízes da equação algébrica de segundo grau. A equação deferencial linear homogênea de segunda ordem, equação (1), caso D(x) = 0, com os operadores diferenciais evidenciados, fica

1 - Departamento de Física/Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Caixa Postal 6001, Londrina, Paraná, Brasil, CEP 86051-970.

$$\left[A(x)\frac{d^2}{dx^2} + B(x)\frac{d}{dx} + C(x)\right] y(x) = 0, \quad (3)$$

que tem uma forma similar à equação algébrica de segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (4)$$

Equações diferenciais, no entanto, são muito mais complexas que as equações algébricas, pois as variáveis envolvidas são operadores diferenciais e funções atuando sobre uma outra função, a ser determinada. Entretanto, o procedimento usado na resolução da equação algébrica de segundo grau pode servir como um guia importante no tratamento destinado às equações diferenciais. Por exemplo, uma maneira simples de resolver a equação (4) é colocar na forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0. \quad (5)$$

Se desejarmos prosseguir na fatoração, podemos considerar

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \alpha\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \beta\right) = 0.$$

Desenvolvendo,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + (\alpha + \beta)\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \alpha\beta = 0$$

e comparando com a equação (5), temos

$$\alpha = -\beta = \mp\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right),$$

resultando na forma fatorada

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0 \quad (6)$$

Esta equação é satisfeita se

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0 \quad (7)$$

ou

$$\left(x_2 + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0. \quad (8)$$

Neste sentido, a equação algébrica de segundo grau (4) foi transformada em duas equações algébricas de primeiro grau, cujas soluções são imediatamente identificadas.

Ao contrário de uma equação algébrica de segundo grau, não há procedimento geral conhecido para transformar uma equação diferencial linear de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem, que identificariam de forma mais simples as duas soluções linearmente independentes. Evidentemente, isto poderia ser feito se fosse possível fatorar a equação diferencial, equação (3). Neste sentido, os primeiros trabalhos foram desenvolvidos por (INFELD & HULL, 1951), com o estabelecimento de algumas regras e procedimentos a serem seguidos. Como, de qualquer maneira, não se trata de uma regra geral de fatoração, cada caso deve ser analisado em função das suas peculiaridades que, às vezes, indicam uma regra simples de fatoração. É o que se pretende mostrar nos exemplos apresentados, inicialmente para equações diferenciais a coeficientes constantes.

Este é um dos trabalhos que vem sendo usado junto aos alunos bolsistas do Curso de Física da UEL que integram D Grupo PET/Capes como um guia inicial no estudo de diversos aspectos das equações diferenciais da Ffsica-Matemática, com ênfase nos operadores, suas propriedades algébricas e as possíveis aplicações na Física.

2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM A COEFICIENTES CONSTANTES

Uma equação diferencial linear de segunda ordem a coeficientes constantes tem a forma geral

$$\left[A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C\right] x(t) = 0. \quad (9)$$

Um exemplo familiar é a equação clássica do oscilador harmônico simples unidimensional (SYMON, 1972).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (10)$$

É imediato verificar que pode ser fatorada como

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x = 0 \quad (11)$$

ou

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) x = 0. \quad (12)$$

as duas soluções linearmente independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ satisfazendo às equações diferenciais de primeira ordem,

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x_1(t) = 0 \quad (13)$$

e

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) x_2(t) = 0, \quad (14)$$

respectivamente, para

$$x_1(t) = e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-i\omega t} \tag{15}$$

A equação na forma geral pode ser exemplificada pela equação do oscilador harmônico simples, unidimensional, com amortecimento,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \tag{16}$$

Usando o caso sem amortecimento como exemplo, pode-se tentar a fatoração

$$\left(\frac{d}{dt} + \Omega\right)\left(\frac{d}{dt} + \Omega^*\right)x = 0, \tag{17}$$

ou seja,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + (\Omega + \Omega^*)\frac{d}{dt} + \Omega\Omega^*\right)x = 0,$$

de modo que, para

$$\Omega = a + ib, \tag{18}$$

resulta

$$(\Omega + \Omega^*) = 2a = 2\gamma \quad \text{e} \quad \Omega\Omega^* = a^2 + b^2 = \omega^2,$$

ou seja,

$$\Omega = \gamma + i(\omega^2 - \gamma^2)^{1/2}. \tag{19}$$

As soluções procuradas são obtidas das equações de primeira ordem,

$$\left(\frac{d}{dt} + \Omega^*\right)x_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{dt} + \Omega\right)x_2(t) = 0\,, \tag{20}$$

resultando

$$x_1(t) = e^{-\Omega^* t} = \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-\Omega t}\,, \tag{21}$$

que correspondem, evidentemente, às conhecidas soluções para os três casos possíveis de um oscilador harmônico simples com amortecimento.

3 - EGUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM A COEFICIENTES VARIÁVEIS

A fatoração de uma equação diferencial linear de segunda ordem a coeficientes variáveis é uma tarefa um pouco mais complexa que no caso dos coeficientes constantes. O método dos operadores de fatorização é pouco utilizado na resolução de equações diferenciais, por ser de difícil aplicação, e a sua vantagem aparece em poucas situações mais simples da Mecânica Quântica, quando a sua elegância e simplicidade se tornam visíveis. Pretende-se mostrar, neste trabalho que o método é muito mais abrangente, podendo ser aplicado para a maioria das equações diferenciais usuais da Física Matemática, apesar de não oferecer nenhum formalismo de aplicabilidade geral ao propósito da fatoração, muitas vezes vaiendo-se da intuição, através da apresentação de alguns exemplos simples, estendendo o procedimento para as equações tradicionais da Física Matemática, como as equações de Legendre, de Bessel, etc.

3.1 - Exemplos de fatoração imediata

Apresenta-se nesta subsecção algumas equações diferenciais cuja fatoração é relativamente simples que podem servir de guia para os casos mais complexos. Considere

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{6}{x^2}y = 0. \tag{22}$$

Pode-se tentar a fatoração na forma de produto de dois operadores diferenciais,

$$\left(\frac{d}{dx} + f\right)\left(\frac{d}{dx} - f\right)y = 0, \tag{23}$$

onde f(x) é uma função arbitrária. Resulta em

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - f' - f^2\right)y = 0,$$

que resulta na equação original se

$$f' + f^2 = \frac{6}{x^2}.$$

Supondo, para um parâmetro a constante,

$$f = \frac{\alpha}{x} \Longrightarrow f' = -\frac{\alpha}{x^2} \quad \text{e} \quad f^2 = \frac{\alpha^2}{x^2}, \tag{24}$$

chega-se a uma equação algébrica de segundo grau em α,

$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0,$$

cujas raízes são

$$\{\alpha\} = \{-2, 3\},$$

correspondentes às duas soluções para f(x),

$$f(x) = \begin{cases} = -2/x \\ = 3/x \end{cases} \tag{25}$$

Para $\alpha = -2$, a fatoração fica

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{2}{x}\right) y = 0, \qquad (26)$$

e para $\alpha = 3$,

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{3}{x}\right) y = 0, \qquad (27)$$

de modo que uma das soluções deve satisfazer à equação diferencial de primeira ordem

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{2}{x}\right) y = 0, \qquad (28)$$

e a outra,

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{3}{x}\right) y = 0, \qquad (29)$$

cujas soluções base são, respectivamente,

$$y_1 = 1/x^2 \quad \text{e} \quad y_2 = x^3 \ . \qquad (30)$$

Uma outra equação diferencial de fácil fatoração é

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0 \ . \qquad (31)$$

que, através de procedimentos análogos ao caso anterior, resulta em

$$\left(x\frac{d}{dx} \pm a\right)\left(x\frac{d}{dx} \mp a\right) y = 0, \qquad (32)$$

as soluções bases

$$y_1 = x^a \quad \text{e} \quad y_2 = x^{-a} \qquad (33)$$

obtidas a partir das equações diferenciais de primeira ordem

$$\left(x\frac{d}{dx} \mp a\right) y = 0 \ . \qquad (34)$$

A equação diferencial seguinte,

$$y'' - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} y = 0 \qquad (35)$$

surge como a parte radial da equação de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

em coordenadas polares esféricas. Pode ser fatorada como

$$0 = \hbar\left(\frac{x}{1-\jmath} - \frac{xp}{p}\right)\left(\frac{x}{1+\jmath} + \frac{xp}{p}\right) \qquad (36)$$

ou

$$0 = \hbar\left(\frac{x}{\jmath} + \frac{xp}{p}\right)\left(\frac{x}{\jmath} - \frac{xp}{p}\right) \qquad (37)$$

as soluções podendo ser procuradas através das equações diferenciais de primeira ordem

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{\ell}{x}\right) y = 0 \qquad (38)$$

e

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{\ell+1}{x}\right) y = 0 \ , \qquad (39)$$

respectivamente

$$y_1 = x^{-\ell} \qquad \text{e} \qquad y_2 = x^{\ell+1} \ . \qquad (40)$$

3.2 – Equação de Legendre

A equação de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \ , \qquad (41)$$

é uma das principais equações diferenciais da Física-Matemática, parte angular do desenvolvimento o operador laplaciano em coordenadas esféricas.
A sua fatoração pode ser tentada, multiplicando inicialmente por $(1 - x^2)$,

$$\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx} + (1 - x^2)\lambda\right] y = 0 \ , \qquad (42)$$

através de

$$\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx} + f\right]\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx} - f\right] =$$

$$(1 - x^2)\left[\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx} - f'\right] - f^2 \ .$$

Considere, para α constante,

$$f' = -\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad f = -\alpha x \quad ,$$

de modo que a equação acima fica

$$\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx} - \alpha x\right]\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx} + \alpha x\right] =$$

$$(1 - x^2)\left[\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx} + \alpha(\alpha + 1)\right] - \alpha^2 \ .$$

Definindo os operadores

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \alpha(\alpha+1) \ , \quad (43)$$

$$Q_\alpha = (1-x^2)\frac{d}{dx} + \alpha x \quad (44)$$

e

$$Q_\alpha^+ = -(1-x^2)\frac{d}{dx} + \alpha x \ , \quad (45)$$

verifica-se que

$$Q_\alpha Q_\alpha^+ = -(1-x^2)\mathcal{L}_{\alpha-1} + \alpha^2 \quad (46)$$

e

$$Q_\alpha^+ Q_\alpha = -(1-x^2)\mathcal{L}_\alpha + \alpha^2 \ . \quad (47)$$

Como

$$\mathcal{L}_\alpha \, y_\alpha = 0 \quad (48)$$

é a equação de Legendre para $\lambda = \alpha(\alpha+1)$, resultam

$$Q_\alpha^+ Q_\alpha \, y_\alpha = \alpha^2 y_\alpha \ , \quad (49)$$

e

$$Q_\alpha Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} = \alpha^2 y_{\alpha-1} \ . \quad (50)$$

Multiplicando, pelo lado esquerdo, a primeira equação por Q_α e a segunda por Q_α^+, resultam

$$Q_\alpha(Q_\alpha^+ Q_\alpha)\, y_\alpha = (Q_\alpha Q_\alpha^+) Q_\alpha \, y_\alpha = \alpha^2 Q_\alpha y_\alpha \quad (51)$$

e

$$Q_\alpha^+(Q_\alpha Q_\alpha^+)\, y_{\alpha-1} = (Q_\alpha^+ Q_\alpha) Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} = \alpha^2 Q_\alpha^+ y_{\alpha-1} \ . \quad (52)$$

A equação (51), combinada com a equação (46), resulta

$$(Q_\alpha Q_\alpha^+) Q_\alpha \, y_\alpha = \left[-(1-x^2)\mathcal{L}_{\alpha-1} + \alpha^2\right] Q_\alpha \, y_\alpha = \alpha^2 Q_\alpha y_\alpha \ ,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_{\alpha-1}(Q_\alpha \, y_\alpha) = 0 \ . \quad (53)$$

Do mesmo modo, combinando as equações (52) e (47), resulta

$$(Q_\alpha^+ Q_\alpha) Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} = \left[-(1-x^2)\mathcal{L}_\alpha + \alpha^2\right] Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} = \alpha^2 Q_\alpha^+ y_{\alpha-1} \ ,$$

e portanto

$$\mathcal{L}_\alpha(Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1}) = 0 \ . \quad (54)$$

Destes resultados, pode-se concluir que

$$Q_\alpha \, y_\alpha = C y_{\alpha-1} \qquad \text{e} \qquad Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} = C' y_\alpha \ ,$$

para C e C' constantes. Estas constantes podem ser determinadas substituindo-se a primeira relação na segunda, por exemplo, resultando

$$Q_\alpha^+ Q_\alpha \, y_\alpha = C C' y_\alpha \ ,$$

que, comparado com a equação (49), implica

$$C C' = \alpha^2 \ .$$

Se considerar $C = C' = \alpha$, resultam

$$y_{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha} Q_\alpha \, y_\alpha \quad (55)$$

e

$$y_\alpha = \frac{1}{\alpha} Q_\alpha^+ \, y_{\alpha-1} \ . \quad (56)$$

Para $\alpha = 0$, pode-se impor

$$Q_0 \, y_0 = (1-x^2)\frac{d}{dx} \, y_0 = 0 \ , \quad (57)$$

cuja solução, convenientemente normalizada, é o polinômio de Legendre de ordem zero,

$$y_0 = P_0 = 1. \quad (58)$$

Para $\alpha = \ell$ inteiro positivo, a equação (56) fornece os polinômios de Legendre de ordem ℓ, $P_\ell(x)$, pela aplicação sucessiva dos operadores de levantamento de índice Q_ℓ^+,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\ell} Q_\ell^+ \, P_{\ell-1} \ . \quad (59)$$

De uma maneira geral, a condição

$$Q_0^+ Q_0 \, y_0 = (1-x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} \, y_0 = 0 \ , \quad (60)$$

fornece também a segunda solução da equação de Legendre, através da integração de

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\,y_0 = cte. = C \ ,.$$

que resulta, para $[x] < 1$, por exemplo, na função

$$y_0(x) = \int \frac{C}{(1-x^2)}\,dx = \qquad (61)$$

$$C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)}{(1-x)} \ .$$

$C_1 = 0$ e $C_2 = 1$ corresponde à segunda solução da equação de Legendre de ordem zero, as soluções correspondentes a ℓ inteiros positivos sendo obtidas pela aplicação sucessiva dos operadores de levantamento de índices Q_ℓ^+.

3.3 – Funções esféricas de Bessel

Funções esféricas de Bessel são as soluções da parte radial da equação de Helmholtz

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0,$$

escritas em coordenadas polares esférias.

Considerando

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi),$$

a equação radial fica

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \left[k^2r^2 - \ell(\ell+1)\right]R = 0, \qquad (62)$$

que pode ser transformada na equação de Bessel de ordem semi-inteira

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2} + r\frac{dZ}{dr} + \left[k^2r^2 - \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\right]Z = 0 \qquad (63)$$

para

$$R(r) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}. \qquad (64)$$

Se, ao invés disto, for definida a relação

$$R(r) = \frac{u(kr)}{kr}, \qquad (65)$$

tal que

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{kr}\frac{du}{dr} - \frac{u}{kr^2}$$

e

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} = \frac{r}{k}\frac{d^2u}{dr^2},$$

a equação (62) fica

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u = 0, \qquad (66)$$

ou, em forma de uma equação de auto-valores,

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u = -k^2u, \qquad (67)$$

cujo lado esquerdo pode ser fatorado como

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}\right]\left[\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r}\right]u = -k^2u \qquad (68)$$

ou

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{(\ell+1)}{r}\right]\left[\frac{d}{dr} - \frac{(\ell+1)}{r}\right]u = -k^2u, \qquad (69)$$

podendo-se verificar facilmente que

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}\right]\left[\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r}\right] =$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{(\ell+1)}{r}\right]\left[\frac{d}{dr} - \frac{(\ell+1)}{r}\right] = \mathcal{H}_\ell \qquad (70)$$

para

$$\mathcal{H}_\ell = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \qquad (71)$$

Definindo os operadores

$$D_\ell = \left[\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r}\right] \qquad (72)$$

e

$$D_\ell^+ = -\left[\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}\right], \qquad (73)$$

resultam as relações

$$D_{\ell+1}^+\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}_{\ell+1}D_{\ell+1}^+ \qquad (74)$$

e

$$D_{\ell+1}\mathcal{H}_{\ell+1} = \mathcal{H}_\ell D_{\ell+1}. \qquad (75)$$

Usando a equação de auto-valores

$$\mathcal{H}_\ell u_\ell = -k_\ell^2 u_\ell \qquad (76)$$

ficam

$$D^+_{\ell+1}\mathcal{H}_\ell u_\ell = \mathcal{H}_{\ell+1}D^+_{\ell+1}u_\ell = -k^2_\ell D^+_{\ell+1}u_\ell$$

e

$$D_{\ell+1}\mathcal{H}_{\ell+1}u_{\ell+1} = \mathcal{H}_\ell D_{\ell+1}u_{\ell+1} = -k^2_{\ell+1}D_{\ell+1}u_{\ell+1},$$

sugerindo que

$$D^+_{\ell+1}u_\ell = Cu_{\ell+1} \quad \text{e} \quad D_{\ell+1}u_{\ell+1} = C'u_\ell,$$

desde que

$$k^2_{\ell+1} = k^2_\ell = k^2.$$

Isto é, os auto-valores são completamente degenerados, os operadores D^+_ℓ e D_ℓ atuando como operadores de levantamento e de abaixamento de índices dos auto-estados ou, na nomenclatura da Mecânica Quântica, como operadores de criação e de aniquilação,

$$u_{\ell+1} = \frac{1}{k}D^+_{\ell+1}u_\ell \tag{77}$$

e

$$u_{\ell-1} = \frac{1}{k}D_\ell\, u_\ell. \tag{78}$$

Os operadores de criação e de aniquilação permitem relacionar os vários auto-estados, de modo que, conhecendo-se um destes auto-estados, pode-se obter os demais. Neste caso, pode-se obter o auto-estado para o caso $\ell = 0$, quando a equação de auto-valores fica

$$\mathcal{H}_0 u_0 = \frac{d^2u_0}{dr^2} = -k^2u_0\ , \tag{79}$$

cujas duas soluções linearmente independentes são

$$u_{0,1} = \cos kr \qquad \text{e} \qquad u_{0,2} = sen\, kr. \tag{80}$$

Como, pela definição usada,

$$u_\ell(r) = rR_\ell(r),$$

que deve ser nula na origem, r = 0, a solução fisicamente aceitável é

$$u_0(r) = sen\, kr \Longrightarrow R_0(r) = \frac{sen\, kr}{kr}. \tag{81}$$

Os demais auto-estados podem ser obtidos pela aplicação sucessiva dos operadores de criação. Por exemplo,

$$u_1(r) = \frac{1}{k}D^+_1 u_0 = -\frac{1}{k}\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right]u_0 = -\cos kr + \frac{1}{kr}sen\, kr. \tag{82}$$

Do ponto de vista da Física Matemática, as auto-funções $u_\ell(r)$ são as funções esféricas de Bessel.

4 - RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA E OPERADORES

Foi visto nas secções precedentes a fatorização de algumas equações diferenciais lineares de segunda ordem, com a introdução de operadores que, em problemas de auto-valores, funcionam como operadores de levantamento e de abaixamento de índices, ou na linguagem da Mecânica Quântica, operadores de criação e de aniquilação.

Muitas das equações da Física Matemática são equações de auto-valores, discretos, com as auto-funções obedecendo a relações de recorrência (ARFKEN, 1966). Nestes casos, pode-se mostrar que os operadores de levantamento e de abaixamento de índices podem ser derivados diretamente das relações de recorrência. Uma aplicação sucessiva do operador de levantamento e do operador de abaixamento de índices, ou vice-versa, que corresponde a uma transformação identidade, resulta em geral na equação diferencial original, mostrando que os operadores de fatorização coincidem com os operadores de levantamento e de abaixamento de índices. No entanto, como relações de recorrência são derivadas a partir da função geratriz, sendo portanto conhecidas as soluções da equação diferencial considerada, nestes casos, a fatoração como método de resolução de equações diferenciais se torna redundante.

Mesmo assim, a identificação dos operadores de levantamento e de abaixamento de índices é interessante, deixando mais claras as relações entre as auto-funções, além do interesse matemático intrínseco destes operadores, que atuam sobre o espaço vetorial definido pelas mesmas; além disso, o conhecimento da álgebra destes operadores pode se tornar importante no estudo das propriedades físicas e matemáticas de um determinado sistema.

A seguir, faz-se a identificação dos operadores de levantamento e de abaixamento de índices para diversas equações diferenciais da Física Matemática, a partir de pares de relações de recorrência.

Veja que, com exceção da equação de Bessel, as demais podem ser resolvidas, com certa facilidade, para as auto-funções de nível mais baixo (auto-valor nulo), a partir das quais pode-se obter as demais pela aplicação sucessiva dos operadores de levantamento de índices.

4.1 – Equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0. \tag{83}$$

As relações de recorrência úteis são

$$P_{\ell+1} = xP_\ell - \frac{(1-x^2)}{\ell+1}P'_\ell \qquad , \ell \geq 0 \tag{84}$$

e

$$P_{\ell-1} = xP_\ell + \frac{(1-x^2)}{\ell}P'_\ell \qquad , \ell \geq 1, \tag{85}$$

podendo-se de imediato identificar os operadores de levantamento e de abaixamento de índices, definidos por

$$P_{\ell+1} = -\frac{1}{(\ell+1)}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} - (\ell+1)x\right]P_\ell \tag{86}$$

e

$$P_{\ell-1} = \frac{1}{\ell}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + \ell x\right]P_\ell \quad , \tag{87}$$

que coincidem com os operadores previamente definidos na secção anterior, equações (44) e (45), respectivamente.

4.2 – Equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{88}$$

Pode-se usar as relações de recorrência

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x}J_n \tag{89}$$

e

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J'_n \tag{90}$$

que definem os operadores de levantamento e de abaixamento de índices, respectivamente

$$J_{n+1} = -\left[\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}\right]J_n \tag{91}$$

e

$$J_{n-1} = \left[\frac{d}{dx} + \frac{n}{x}\right]J_n. \tag{92}$$

4.3 – Equação de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{93}$$

Usa-se as relações de recorrência

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \tag{94}$$

e

$$H'_n = 2nH_{n-1}\, , \tag{95}$$

correspondentes aos operadores de levantamento e de abaixamento de índices

$$H_{n+1} = -\left[\frac{d}{dx} - 2x\right]H_n \tag{96}$$

e

$$H_{n-1} = \frac{1}{2n}\frac{d}{dx}H_n\ . \tag{97}$$

Pode-se ver que os operadores de levantamento e de abaixamento de índices, neste caso, não são simétricos pela substituição

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}\ ,$$

como nos casos anteriores.

4.4 – Equação de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \tag{98}$$

Parte-se das relações de recorrência

$$L_{n+1} = (2n+1-x)L_n - n^2L_{n-1} \tag{99}$$

e

$$xL'_n = nL_n - n^2L_{n-1}\ , \tag{100}$$

resultando

$$L_{n+1} = \left[x\frac{d}{dx} + n + 1 - x\right]L_n \tag{101}$$

e

$$L_{n-1} = -\frac{1}{n^2}\left[x\frac{d}{dx} - n\right]L_n\ . \tag{102}$$

4.5 – Equação de Chebychev, tipo I

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{103}$$

Tem-se as relações de recorrência

$$T_{n+1} - 2xT_n + T_{n-1} = 0 \tag{104}$$

e

$$(1-x^2)T'_n = -nxT_n + nT_{n-1}\ , \tag{105}$$

resultando nos operadores de levantamento e de abaixamento de índices, respectivamente

$$T_{n+1} = -\left[\frac{(1-x^2)}{n}\frac{d}{dx} - x\right] T_n \quad (106)$$

e

$$T_{n-1} = \left[\frac{(1-x^2)}{n}\frac{d}{dx} + x\right] T_n \, . \quad (107)$$

4.6 – Equação de Chebychev, tipo II

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0. \quad (108)$$

As relações de recorrência

$$U_{n+1} - 2xU_n + U_{n-1} = 0 \quad (109)$$

e

$$(1-x^2)U'_n = -nxU_n + (n+1)U_{n-1} \quad (110)$$

definem os operadores de levantamento e de abaixamento de índices, respectivamente

$$U_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} - (n+2)x\right] U_n \quad (111)$$

e

$$U_{n-1} = \frac{1}{(n+1)}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + n\,x\right] U_n \, . \quad (112)$$

5 - CONCLUSÕES

Apresentamos, através de exemplos, a fatoração de várias equações diferenciais lineares de segunda ordem, mostrando ser, em alguns casos, uma alternativa simples e elegante para a resolução destas equações diferenciais.

Mostramos também que em equações diferenciais envolvendo problemas de auto-valores, podemos obter facilmente os operadores de fatorização a partir das relações de recorrência, sendo identificados como os operadores de levantamento e de abaixamento de índices, que fazem a conexão entre as auto-funções. Nestes casos, não se deve considerar a fatoração como um método de resolução destas equações diferenciais, pois as soluções já são conhecidas a partir do momento em que são conhecidas as relações de recorrência, derivadas a partir das funções geratrizes. No entanto, os operadores de levantamento e de abaixamento de índices tem interesses físicos e matemáticos intrínsecos, justificando os esforços na sua identificação, assim como no estudo das suas propriedades.

Do ponto de vista didático, podemos enriquecer muito o estudo das equações diferenciais com a introdução do método dos operadores de fatorização, que fornece uma maneira simples e elegante de se resolver uma séries de equações diferenciais lineares de segunda ordem da Física Matemática, além da introdução dos recursos dos operadores de levantamento e de abaixamento de índices nos problemas de auto-valores, importantes principalmente no contexto da Mecânica Quântica.

GOTO, M. Factorization Operators in Mathematical Physics. **Semina:** Ci. Exatas/Tecnol., Londrina, v. 14/15, n. 4, p. 365-374, Dec. 1993/Dec. 1994.

ABSTRACT: *We present applications of factorization operators to solve linear second order differential equations as an alternativo to the Frobenius method in Mathematical Physics. In some simple examples, the factorization reduces a second order differential equation to a pair of first order differential equations, each one giving one of the linearly independent solutions. In other, generally eigenvalue equations, the factorization operators are identified with the eigenfunctions index raising and lowering operators; in these cases, one just need to solve the towest eigenvalue differential equations, where a simple integration is enough. We can also confirm that the majority of Mathematical Physics differential equations can be factored.*

KEY-WORDS: *Linear differential equations; Differential operators; Factorization operators.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, N.A.; DRIGO FILHO, E. The Factorisation Method and Supersymmetry. *J. Phy. A: Math. Gen.*, v. 21, p. 3212-3225, 1988.

ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. New York: Academic Press, 1966.

BOYCE, W.E.; DiPRIMA, R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, 1965.

BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. New York: Addison-Wesley, 1968.

DICKE, R.H.; WITTKE, J.P. *Introduction to Quantum Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960.

GASIOROWICZ, S. *Quantum Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

GOTO, M. **O Método dos Operadores de Fatorização em Sistemas Quânticos Tridimensionais.** *Rev. Bras. de Ensino de Física*, v. 15, 1993.

INFELD, L.; HULLI, T.E. **The Factorization Method.** *Rev. of Mod. Phys.*, v. 23, n. 1, p. 21-68, 1951.

KIMELL, I. **A Simple Way of Solving the Hydrogen Atom Problem.** *Rev. Bras. de Física*, v. 12, n. 4, p. 729-737, 1982.

POWELL, L.J.; CRASEMANN, B. *Quantum Mechanics.* New York: Addison-Wesley, 1961.

SYMON, K.R. *Mechanics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972.

TIJONOV, A.N.; SAMARSKY, A.A. *Ecuaciones de la Fisica Matematica.* Moscou: MIR, 1972.

Recebido para publicação em 13/06/94