

ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGAS CONTÍNUAS CURVAS EM PLANTA COM SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE FINA

GILBERTO CARBONARI^a

CARBONARI, G. Análise estática de vigas contínuas curvas em planta com seção transversal aberta e parede fina *Semina* v. 12, n. 4, p.189-204, dez. 1991.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma solução numérica das equações diferenciais de vigas curvas assimétricas com parede fina e seção transversal aberta, devidas a Vlasov. É portanto admitido um comportamento estrutural elástico linear, sendo empregado na análise estática o método das Diferenças Finitas Centrais. Devido a curvatura da viga, a análise envolve o acoplamento entre a flexão vertical e a torção, levando em conta, além da torção de Saint Venant, também a torção de empenamento. São consideradas quaisquer combinações das condições de contorno e apoios intermediários, incluindo bordos rotulados e engastados na flexão e na torção. Os resultados da análise teórica, obtidos pela aplicação de um programa computacional implementado em microcomputador, são comparados com a bibliografia técnica, apresentando boa correlação.

PALAVRAS CHAVES: *Vigas Curvas, Análise Estática, Seção Aberta, Parede Fina.*

1 -INTRODUÇÃO

Este trabalho está baseado na Dissertação de Mestrado desenvolvida na UFRGS, indicada na referência CARBONARI¹.

Verificou-se, na bibliografia técnica, trabalhos relacionados com a análise estática de vigas retas e curvas, com dupla simetria da seção transversal. No entanto, não foram encontradas soluções para seção transversal arbitrária, por exemplo, seção transversal aberta e de parede fina.

Tanto a curvatura da viga como a posição do centro de flexão (centro de torção) produzem acoplamento entre os esforços de flexão e torção, sendo então necessária a determinação do centro de flexão, resolvendo as forças internas apropriadas de flexão e de torção, e, finalmente, determina as tensões resultantes e deformações.

Adotou-se como solução da viga curva em planta com seção transversal aberta e de parede fina as equações diferenciais de VLASOV², onde consideram o acoplamento entre a flexão e a torção.

Como solução dessas equações diferenciais, foi utilizado o método das Diferenças Finitas Centrais, admitindo-se contornos e apoios intermediários tanto rotulados como engastados na flexão e na torção.

Foi implementado um programa em microcomputador da família PC, designado VICURASS (Viga CURva

ASSimétrica), que faz a análise estática da viga e obtém as respostas em esforços internos solicitantes e deformações.

2 -EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA VIGA CURVA ASSIMÉTRICA

Considera-se viga curva circular de parede fina e seção aberta, com propriedades constantes ao longo da coordenada s que define o comprimento de arco medido a partir do extremo da viga, como se ilustra na Fig. 2.1. Seja R o raio de curvatura no plano normal ao eixo vertical Y . A teoria proposta por VLASOV² está baseada nas seguintes hipóteses:

- O material é elástico e linear;
- A espessura das paredes é pequena em relação às outras dimensões da seção transversal, sendo as dimensões da última pequenas em relação ao comprimento;
- A seção transversal é indeformável, isto é, é rígida no seu plano, mas pode empenar livremente;
- As deformações devidas às tensões de cisalhamento no plano médio da viga são desprezíveis.

Conforme as considerações acima, as equações diferenciais que governam o problema são as seguintes:

^a Departamento de Estruturas - CTU/Universidade Estadual de Londrina, Caixa Postal 6001, CEP 86051-970, Londrina - Paraná - Brasil.

$$E \left(I_x + \frac{I_\omega}{R^2} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{GK_t}{R^2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{EI_\omega}{R} \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} - \frac{(EI_x + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = P_y(s) \quad (2.1)$$

$$EI_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} + \frac{EI_x}{R} \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \frac{(EI_x + GK_t)}{R} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - GK_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{EI_x}{R^2} \theta = M_t(s) \quad (2.2)$$

onde,

- $y(s)$ – deslocamento na direção vertical;
- $\theta(s)$ – giro na seção transversal ao redor do centro de flexão A_0 ;
- $P_y(s)$ – projeção da carga externa distribuída na direção y ;
- $M_t(s)$ – momento torçor externo distribuído em torno de A_0 ;
- E – módulo de Young do material;
- G – módulo de elasticidade transversal do material;
- A – área da seção transversal;
- R – Raio de curvatura;
- K_t – constante de torção de St. Venant;
- I_z – momento central de inércia;
- I_ω – constante de empenamento (momento setorial de inércia);

sendo que as constantes geométricas A , K_t , I_z e I_ω e o centro de flexão A_0 poderão ser obtidas segundo a referência (3).

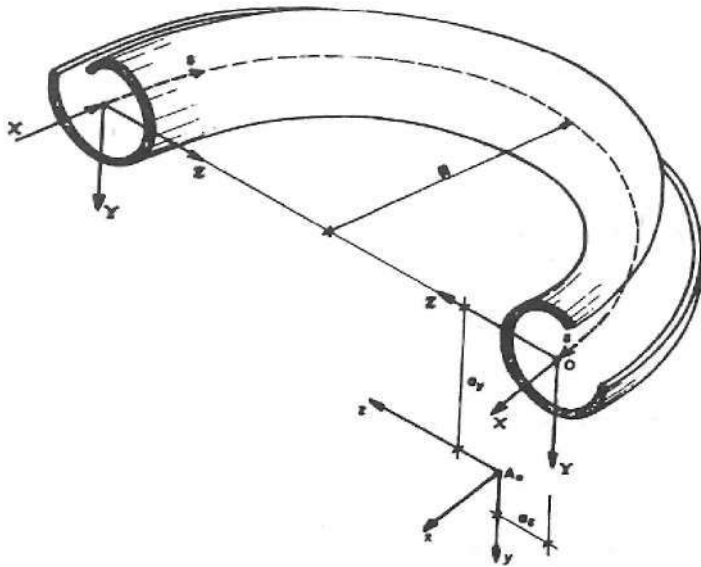


FIGURA 2.1 - Características geométricas e notação da viga curva de seção aberta e parede fina.

3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA VIGA CURVA

Pelo acoplamento das equações diferenciais (2.1) e (2.2), a integração das mesmas por métodos analíticos diretos é, em geral, impraticável. Com isso, optou-se pela aplicação do método de Diferenças Finitas Centrais (D.F.C.). Neste caso, a mesma é feita na coordenada espacial s , conforme retfclua da FIGURA 3.1.

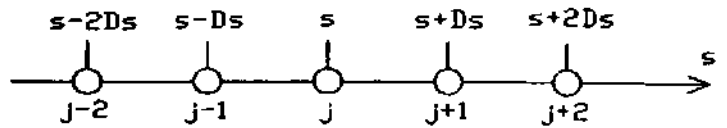


FIGURA 3.1 – Retfclua em Diferenças Finitas Centrais

Substituindo os operadores diferenciais nas equações (2.1) e (2.2), para o ponto genérico j da retfclua, chega-se nas seguintes equações em Diferenças Finitas Centrais, respectivamente.

$$\begin{aligned} & \frac{E}{Ds^4} \left(I_x + \frac{I_\omega}{R^2} \right) (y_{j-2} - 4y_{j-1} + 6y_j - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{GK_t}{R^2 Ds^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) + \\ & \frac{EI_\omega}{Ds^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) - \\ & \frac{EI_x + GK_t}{RDs^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) = P_y \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_\omega}{Ds^4} (\theta_{j-2} - 4\theta_{j-1} + 6\theta_j - 4\theta_{j+1} + \theta_{j+2}) + \frac{EI_x}{RDs^4} (y_{j-2} - 4y_{j-1} + \\ & + 6y_j - 4y_{j+1} + y_{j+2}) - \frac{EI_x + GK_t}{RDs^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) - \\ & - \frac{GK_t}{Ds^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) + \frac{EI_x}{R^2} \theta_j = M_{tj} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Reagrupando os termos das equações (3.1) e (3.2), na forma matricial, para o nó genérico j da retfclua, chega-se no seguinte sistema local:

$$K \vec{U} = \vec{P} \quad (3.3)$$

onde o vetor \vec{U} contém as incógnitas nodais em deslocamentos e giros, cujos elementos possuem a seguinte disposição:

$$\vec{U} = \left\{ \begin{array}{c} y_{j-2} \\ \theta_{j-2} \\ \dots \\ y_{j-1} \\ \theta_{j-1} \\ \dots \\ y_j \\ \theta_j \\ \dots \\ y_{j+1} \\ \theta_{j+1} \\ \dots \\ y_{j+2} \\ \theta_{j+2} \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

A matriz K corresponde à matriz de rigidez local, cujas componentes estão definidas da seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 & (-4A_1-A_2) & (-4A_3-A_4) & (6A_1+2A_2) & (6A_3+2A_4) \\ C_2 & C_1 & (-4C_2-C_3) & (-4C_1-C_4) & (6C_2+2C_3) & (6C_1+2C_4+C_5) \\ & & (-4A_1-A_2) & (-4A_3-A_4) & A_1 & A_3 \\ & & (-4C_2-C_3) & (-4C_1-C_4) & C_2 & C_1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Onde:

$$A_1 = \frac{E}{D_0^4} (I_x + \frac{I_y}{K}), \quad A_2 = \frac{GK_c}{D_0^2 R^2}, \quad A_3 = \frac{EI_w}{RD_0^4}$$

$$A_4 = \frac{1}{RD_0^2} (EI_x + GK_c)$$

$$C_1 = \frac{EI_w}{D_0^4}, \quad C_2 = A_3, \quad C_3 = A_4, \quad C_4 = \frac{GK_c}{D_0^2}, \quad C_5 = \frac{EI_y}{R^2}$$

E, por final, resta o vetor \vec{P} , que contém as componentes nodais das cargas externas e momentos torçores externos distribuídos por unidade de comprimento da viga, relativos ao nó genérico j, possuindo a seguinte definição:

$$\vec{P} = \begin{Bmatrix} Py_j \\ Mt_j \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Quando a viga é discretizada em Diferenças Finitas Centrais com N nós, isto é, fazendo o nó genérico j variar de 1 até N, conforme FIGURA 3.2.

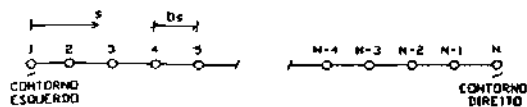


FIGURA 3.2 - Discretização espacial da viga curva em D.F.C.

então o sistema de solução (3.3) assume a seguinte configuração global;

$$K^* \vec{U}^* = \vec{P}^* \quad (3.7)$$

onde K^* equivale à matriz de rigidez global da viga curva, cuja montagem obedece ao seguinte procedimento:

$$K^* = \begin{bmatrix} [K] & & & & \\ & [K] & & & \\ & & [K] & & \\ & & & [K] & \\ & & & & [K] \end{bmatrix}$$

FIGURA 3.3 - Matriz global

onde a dimensão da matriz K^* é de $2(N-2) \times 2(N-2)$.

Já os vetores \vec{U}^* e \vec{P}^* , considerando nulos os deslocamentos verticais e giros de torção nos extremos da viga, possuem a seguinte montagem global:

$$\vec{U}^* = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \\ \dots \\ Y_3 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ Y_{N-2} \\ \theta_{N-2} \\ \dots \\ Y_{N-1} \\ \theta_{N-1} \end{Bmatrix}, \quad \vec{P}^* = \begin{Bmatrix} PY_2 \\ Mt_2 \\ \dots \\ PY_3 \\ Mt_3 \\ \vdots \\ PY_{N-2} \\ Mt_{N-2} \\ \dots \\ PY_{N-1} \\ Mt_{N-1} \end{Bmatrix}$$

onde os elementos do vetor \vec{U}^* são as componentes nodais dos deslocamentos e giros com N nós discretizados; e os elementos de \vec{P}^* são as componentes nodais das cargas e momentos torçores distribuídos por unidades de comprimento da viga curva. Tanto o vetor \vec{U}^* como o vetor \vec{P}^* possuem dimensão de $2(N-2)$ elementos.

No caso de cargas concentradas aplicadas na viga, para obter as componentes das cargas nodais do vetor \vec{P}^* , se determinam as componentes nodais equivalentes através da posição da carga, tornando-as distribuídas.

Finalmente, para que o sistema global (3.7) seja resolvido, resta a consideração das condições de contorno.

Contorno rotulado:

$$U_j = 0 \quad \text{e} \quad U_{j+1} = -U_{j-1}$$

(3.8)

Contorno engastado:

$$U_j = 0 \quad \text{e} \quad U_{j+1} = U_{j-1}$$

onde U é um deslocamento genérico que representa as incógnitas y e θ .

Para os casos onde há apoios intermediários, considera-se para o nó j: $k_j = 1$ e $P_j = 0$, ou seja, $U_j = 0$.

Devido a matriz de rigidez global ser simétrica, o sistema matricial (3.7) foi resolvido pelo método de CHOLESKY, fazendo inicialmente a triangularização e, após, a retrosubstituição para diferentes estados de carregamento.

Após calculados os deslocamentos verticais e os giros de torção, torna-se possível a obtenção dos esforços internos solicitantes (Cortante, Momento Fletor, Momento Torçor de St. Venant, Momento Torçor de Empenamento, Momento Torçor Total e o Bimomento), cujas expressões em Diferenças Finitas Centrais, relativo ao nó genérico j, ficam representadas da seguinte forma.

(cortante)

$$Q_Y = -EI_Z \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial s^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) + \frac{T}{R},$$

(momento fletor)

$$M_Z = -EI_Z \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} - \frac{\theta}{R} \right),$$

(torção de St. Venant)

$$T_S = G K_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial Y}{\partial s} \right),$$

(torção de empenamento)

$$T_\theta = -E I_\omega \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial s^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 Y}{\partial s^3} \right),$$

(torção total)

$$T = T_S + T_\theta,$$

(biomomento)

$$B_M = -EI_\omega \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right),$$

$$Q_{Y_j} = -EI_Z \left[\frac{1}{2Ds^3} (y_{j+2} - 2y_{j+1} + 2y_{j-1} - y_{j-2}) - \frac{1}{2RDS} (\theta_{j+1} - \theta_{j-1}) + \frac{1}{R} T_j \right],$$

$$M_{z_j} = -EI_Z \left[\frac{1}{Ds^2} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) - \frac{1}{R} \theta_j \right],$$

$$T_{s_j} = GK_t \left[\frac{1}{2Ds} (\theta_{j+1} - \theta_{j-1}) + \frac{1}{2DsR} (y_{j+1} - y_{j-1}) \right],$$

$$T_{\theta_j} = -EI_\omega \left[\frac{1}{2Ds^3} (\theta_{j+2} - 2\theta_{j+1} + 2\theta_{j-1} - \theta_{j-2}) + \frac{1}{2RDS^3} (y_{j+2} - 2y_{j+1} + 2y_{j-1} - y_{j-2}) \right],$$

$$T_j = T_{s_j} + T_{\theta_j}$$

$$B_{M_j} = -EI_\omega \left[\frac{1}{Ds^2} (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}) + \frac{1}{RDS^2} (y_{j-1} - 2y_j - y_{j+1}) \right],$$

Com isso, a solução estática da viga curvada em planta se completa, e a partir dela foi implementado em programa em microcomputador designado de VICURASS, cujos exemplos resolvidos estão mostrados na seção que segue (4.).

4 - EXEMPLOS COMPARATIVOS

4.1 — Exemplo 1

Dada a viga circular fechada de raio 5m, simplesmente apoiada nos pilares A, B e C, conforme Fig. 4.1.1, com seção transversal retangular, cuja rigidez a flexão é igual a rigidez a torção, isto é, $EI_z/GK_t = 1$, é submetida a uma carga uniformemente distribuída vertical de 14.4 KN/m e a um momento distribuído tangente a viga de 0.24 KNm/m.

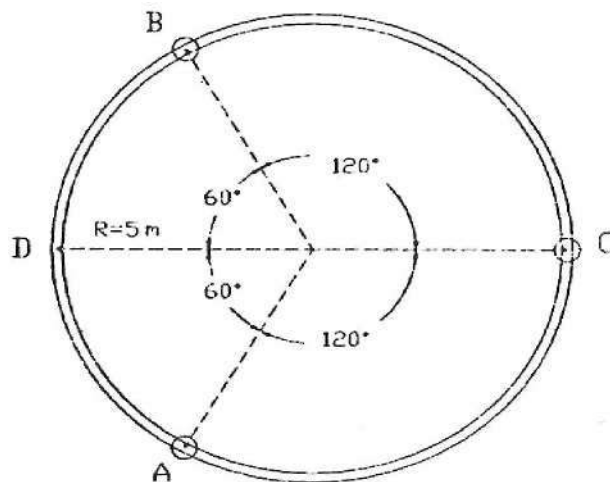


FIGURA 4.1.1 — Viga curva fechada com 3 apoios

Os resultados obtidos pelo presente trabalho, Figs. 4.1.2 a 4.1.4, através do programa VICURASS, são comparados com HIRSCHFELD⁴, conforme a Tabela 4.1.

TABELA 4.1 - Momentos fletores e Torçores (KNm)

	HIRSCHFELD ⁴	VICURASS	DIF. (%)
$M_z^{\max} - M_z^{\min}$	-143.55	-143.54	0.01
M_z^0	74.10	74.12	0.03
M_t^{\max}	29.79	29.88	0.30

4.2 — Exemplo 2

Dada a mesma viga do exemplo 1 simplesmente apoiada em 6 pilares, conforme Fig. 4.2.1, submetida a uma carga uniformemente distribuída vertical de 14.4 KN/m.

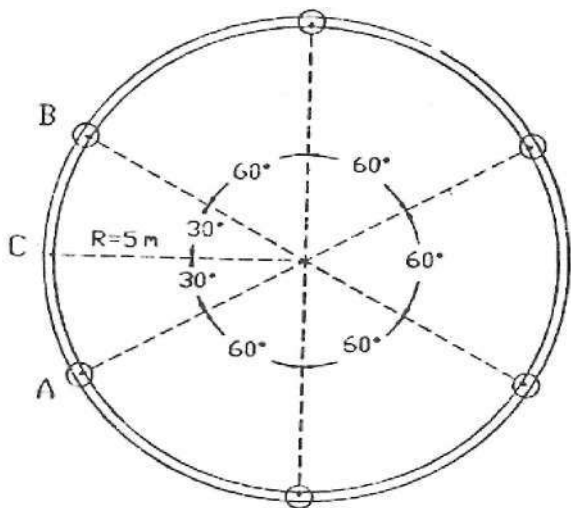


FIGURA 4.2.1 — Viga curva fechada com 6 apoios

Os resultados obtidos pelo presente trabalho, Figs. 4.2.2 a 4.2.4, são comparados com COURTAND & LEBELLE⁵, conforme a Tabela 4.2.

TABELA 4.2 — Momentos fletores e Torçores (KNm)

	COURTAND e LEBELLE ⁵	VICURASS	Dif. (%)
$M_A^x = M_B^x = M_C^x$	-33.522	-33.514	0.02
M_A^z	16.987	16.995	0.05
M_A^{GK}	3.416	3.413	0.09

4.3 — Exemplo 3

Dada a mesma viga do Exemplo 1 engastada no pilar A, conforme Fig. 4.3.1, submetida a uma carga uniformemente distribuída vertical de 10 Kn/m.

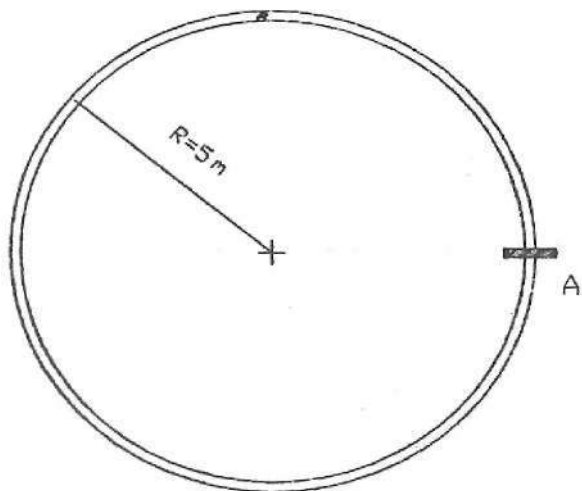


FIGURA 4.3.1 - Viga curva fechada engastada no pilar A
Semina, Ci. Exatas/Tecnol., v.12, n.4, p.189-204, dez. 1991

Os resultados obtidos pelo presente trabalho, Figs. 4.3.2 a 4.3.7, são comparados com COURTAND & LEBELLE⁵, conforme a Tabela 4.3.

TABELA 4.3 - Momentos fletores e Torçores (KNm)

	COURTAND e LEBELLE ⁵	VICURASS	Dif. (%)
$M_A^x = M_B^x = M_C^x$	-500.00	-500.00 (-708.33)	0.00
M_A^z	0.00	(208.33)	0.00
M_A^{GK}	785.40	785.40 (785.41)	0.00

Obs.: Os valores entre parênteses correspondem a $EI_z/GK_j = 11$, Figs. 4.3.5 a 4.3.7, enquanto que para os demais valores, $EI_z/GK_t = 1$, Figs. 4.3.2 a 4.3.4.

4.4 — Exemplo 4

Dada a mesma viga do Exemplo 1, conforme Fig. 4.4.1, submetida a uma carga concentrada de 30 KN, aplicada no ponto P.

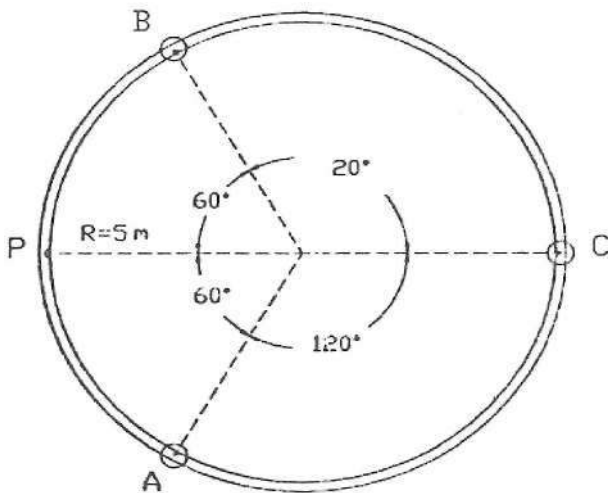


FIGURA 4.4.1 — Viga curva fechada com 3 apoios

Os resultados obtidos pelo presente trabalho, Figs. 4.4.2 a 4.4.4, são comparados com HIRSCHFELD⁴, conforme a Tabela D.5.

TABELA 4.4 Momentos fletores e torçores (KNm)

	HIRSCHFELD ⁴	VICURASS	Dif. (%)
$M_A^x = M_B^x = M_C^x$	28.90	28.86	0.14
M_A^z	-36.10	-36.10	0.00
M_A^{GK}	57.78	57.73	0.05
M_A^{GK}	19.63	19.65	0.10

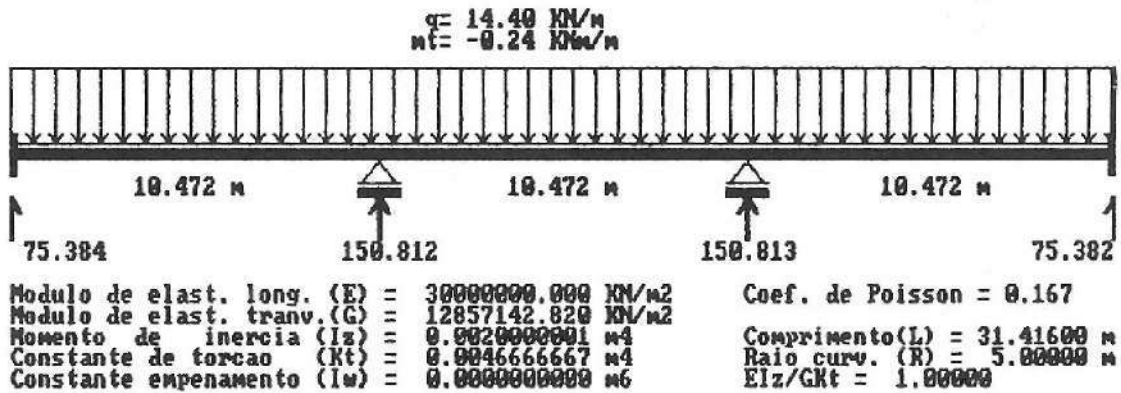


FIGURA 4.1.2 - Dados da viga (EXEMPLO 1)

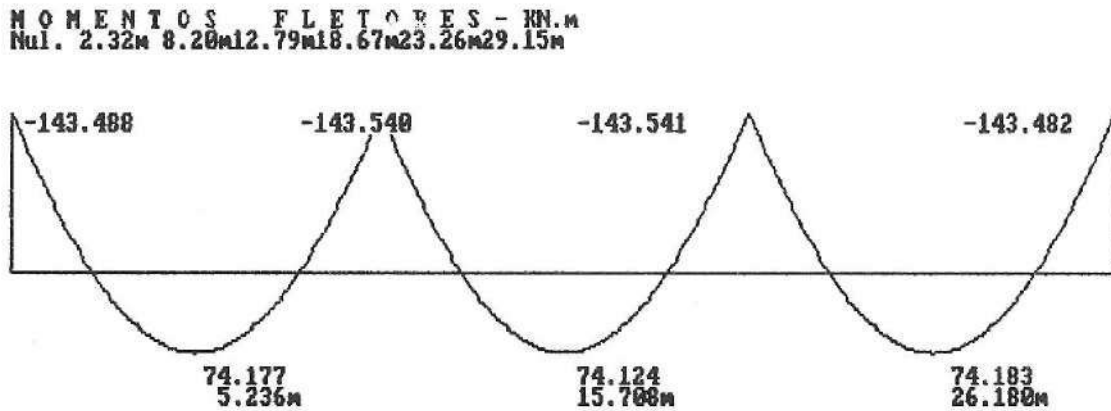


FIGURA 4.1.3 — Diagrama de momentos fletores

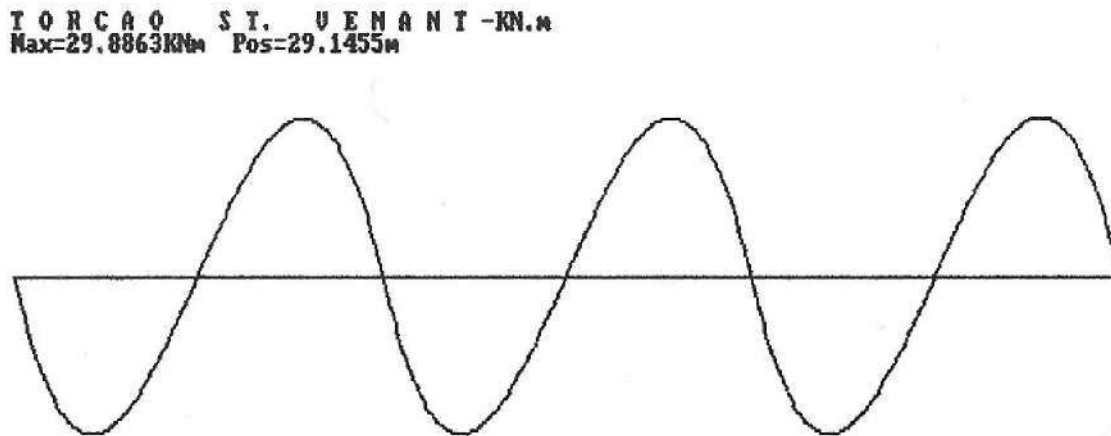


FIGURA 4.1.4 — Diagrama de momentos torçores

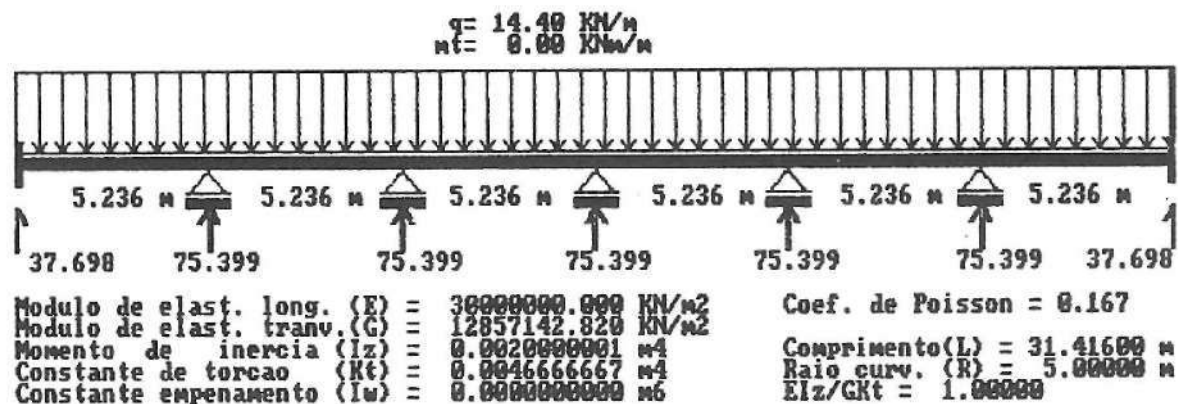


FIGURA 4.2.2 - Dados da viga (EXEMPLO 2)

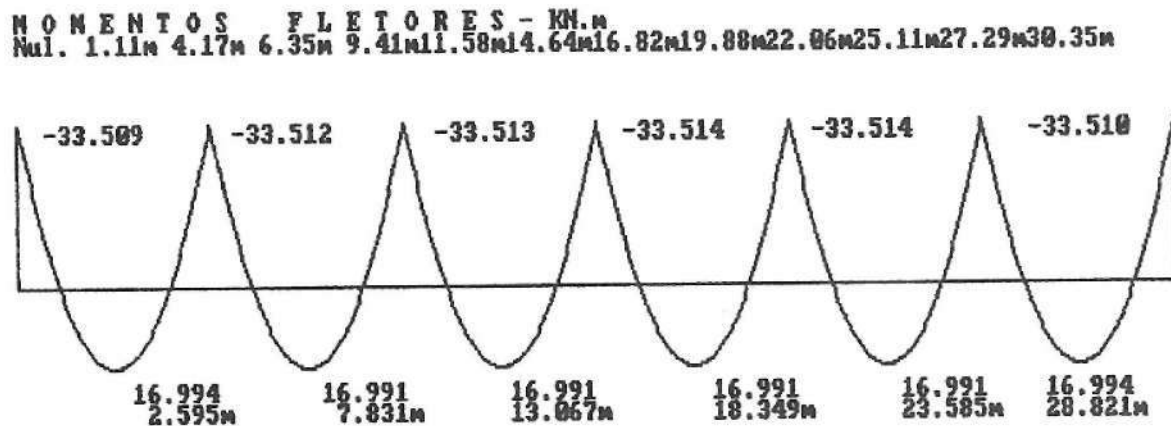


FIGURA 4.2.3 - Diagrama de momentos fletores

TORCAO S.T. VENTANI -KN.m
 Max= 3.413 KNm Pos= 1.1121 m

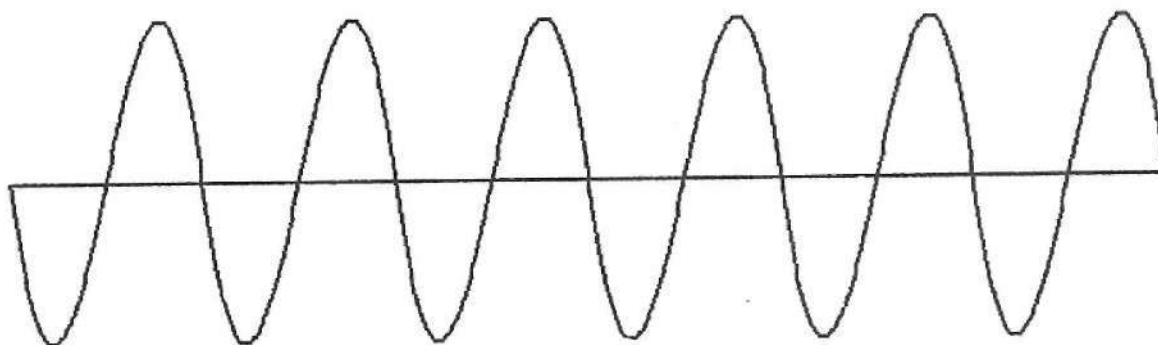


FIGURA 4.2.4 - Diagrama de momentos torçores

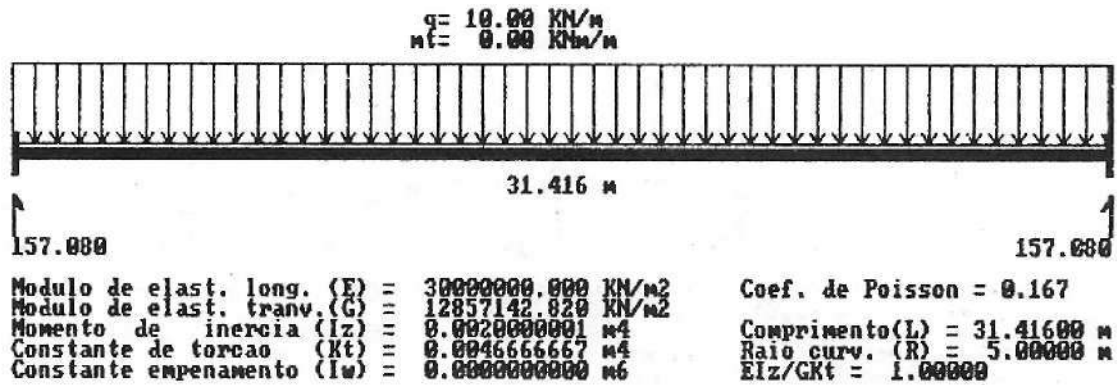


FIGURA 4.3.2 Dados da viga (EXEMPLO 3)

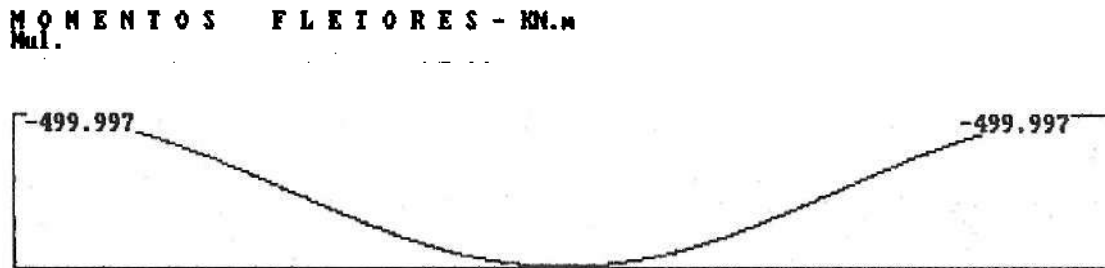


FIGURA 4.3.3 — Diagrama de momentos fletores

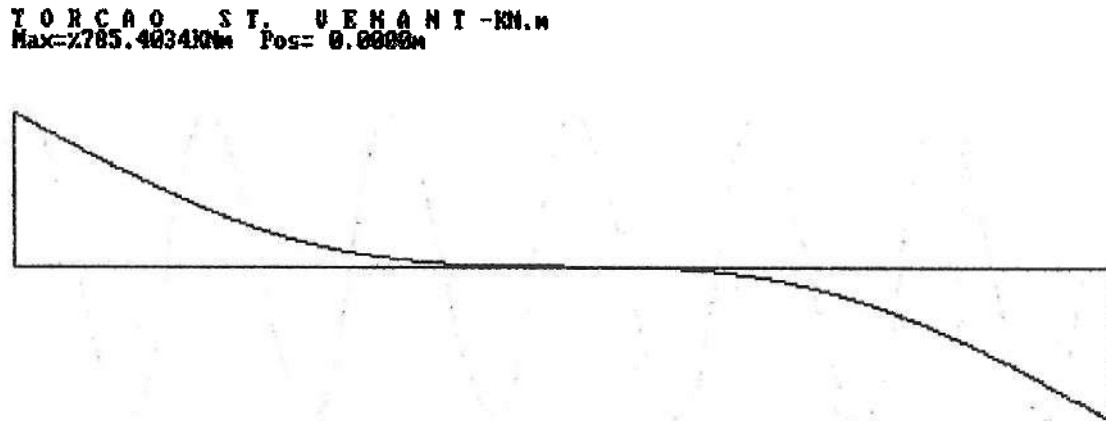


FIGURA 4.3.4 — Diagrama de momentos torçores

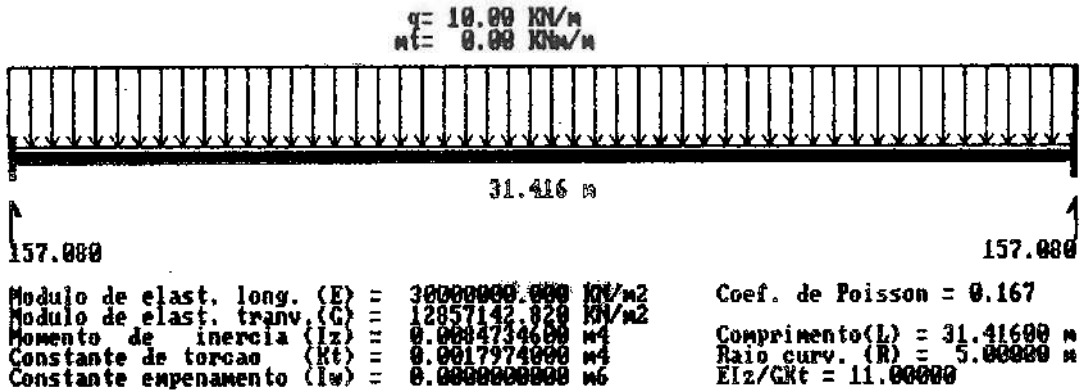


FIGURA 4.3.5 - Dados da viga (EXEMPLO 3)

MOMENTOS FLETORES - KN.m
 Mul. 10.75m 20.71m

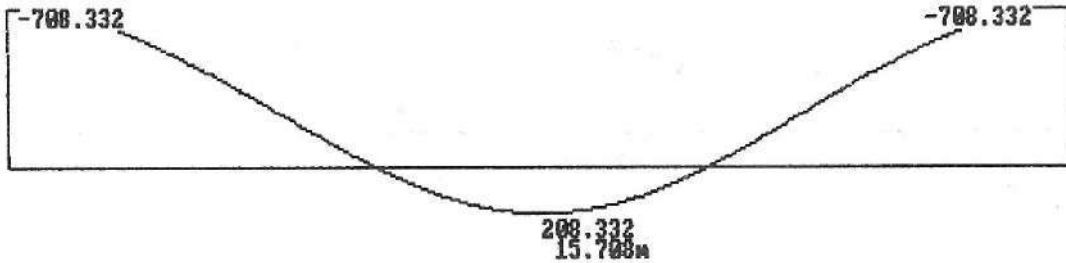


FIGURA 4.3.6 Diagrama de momentos fletores

TORCAO ST. VENANT - KN.m
 Max=785.486 KNm Pos= 0.0000 m

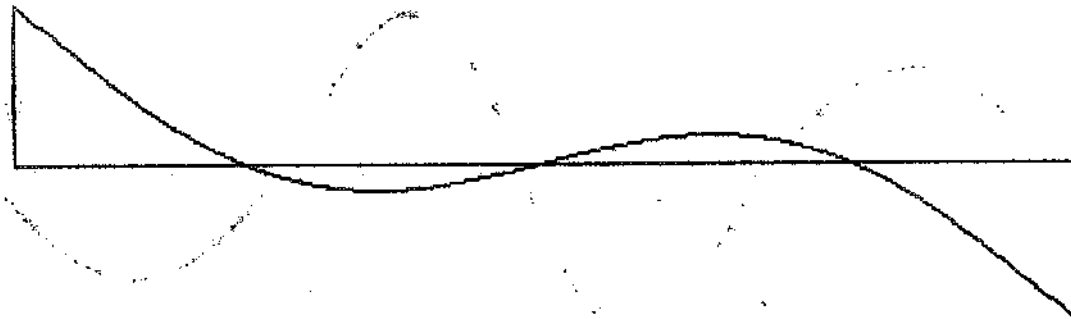


FIGURA 4.3.7 — Diagrama de momentos torçores

Programa VICHASS - Viga CURva ASSimetrica, Autor: Gilberto Carbonari
 CARREGAMENTO DA VIGA - 679 nos discretizados

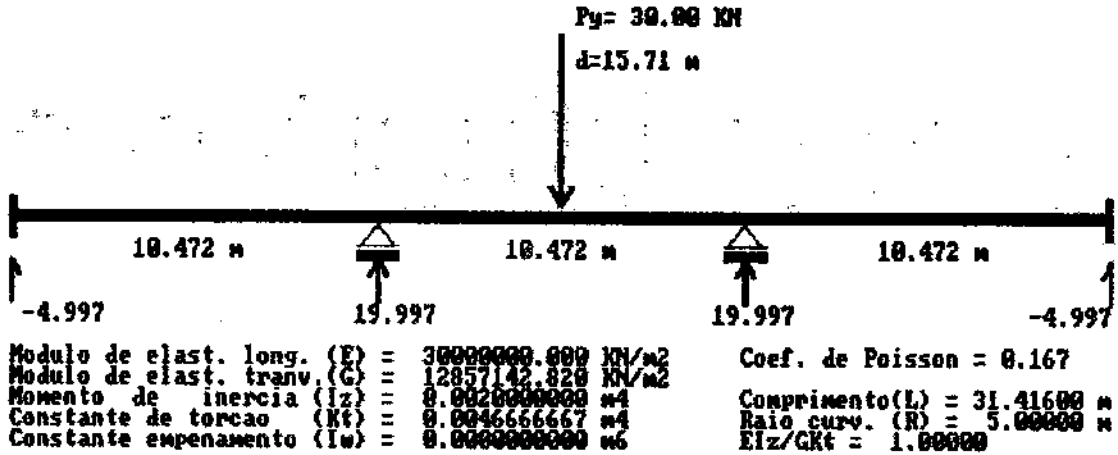


FIGURA 4.4.2 - Dados da viga (EXEMPLO 4)

MOMENTOS FLETORES - KN.m
 NuL. 4.31m | 2.46m | 19.80m | 27.15m

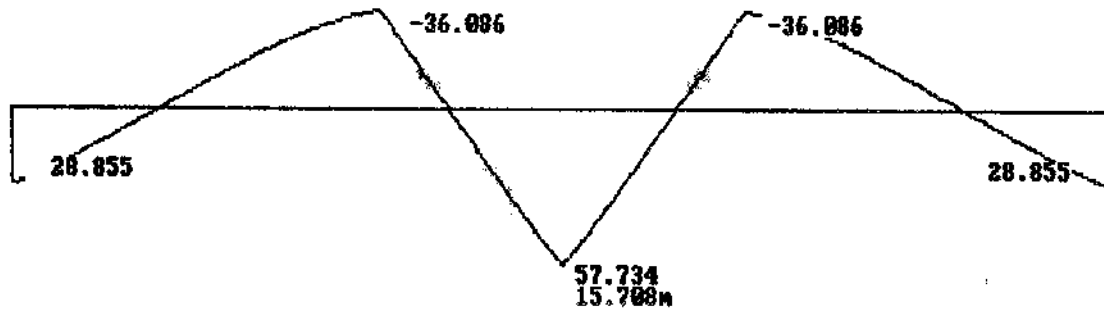


FIGURA 4.4.3 — Diagrama dos momentos fletores

TORCAO SI. UENANT - KN.m
 Max= 19.648 KNm Pos=12.4181 m

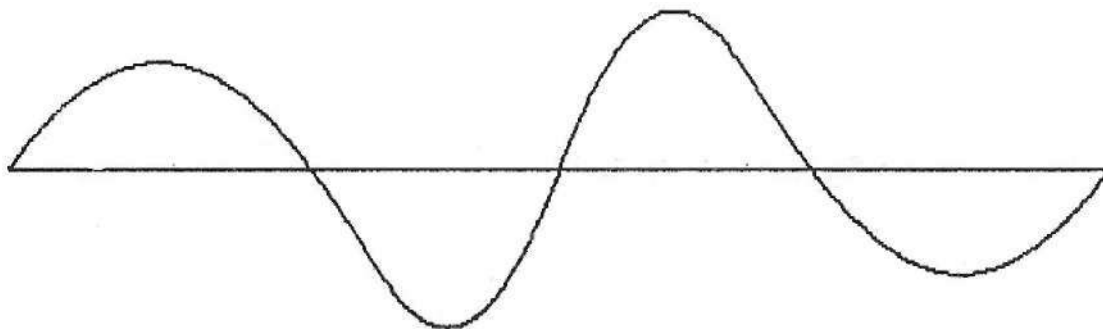


FIGURA 4.4.4 — Diagrama dos momentos torçores

4.5 — Exemplo 5: Torção não Uniforme (com empenamento)

Dada a viga curva da Fig. 4.5.1 com 20m de comprimento e raio de curvatura de 22.9183m, referente a um ângulo de abertura de 50°, e com as seguintes propriedades físicas e geométricas: $E = 2.1 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$, $V = 0,3$, $G = 8.077 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$, $I_z = 10^{-4} \text{ m}^4$, $K_t = 1.96 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_w = 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}^6$. A viga está submetida a uma carga uniformemente distribuída de 15 KN/m com excentricidade 6.66cm em relação ao centro de torção e a uma carga concentrada de 100 KN distante 3m do apoio B com excentricidade 5cm em relação ao centro de torção.

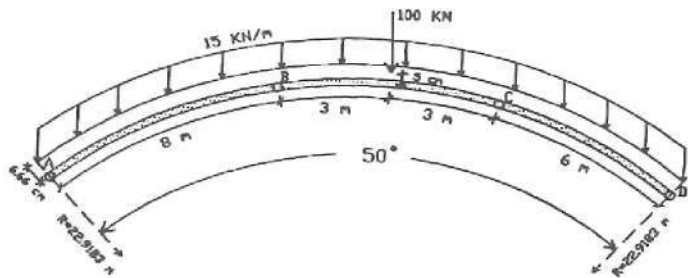


FIGURA 4.5.1 — Viga curva aberta com 4 apoios

Foram analisados 3 casos diferentes, através do programa computacional VICURASS, sendo que os resultados obtidos estão mostrados nas Figs. 4.5.2 a 4.5.4. Nos 3 casos há restrição ao deslocamento vertical ($y = 0$) e ao giro por torção ($\Theta = 0$) nos apoios A, B, C e D.

CASO 1: VIGA CURVA ($\alpha = 50^\circ$) — Fig. 4.5.2

Apoios A e D. Livre para empenar

CASO 2: VIGA CURVA ($\alpha = 50^\circ$) — Fig. 4.5.3

Apoios A e D: Restrição ao empenamento

CASO 3: VIGA RETA ($R = \infty$) — Fig. 4.5.4

Apoios A e D: Livre para empenar

5 - TABELAS PRÁTICAS PARA OS PROFISSIONAIS

5.1 — Viga Circular de Raio R Simplesmente Apoiada em n Pilares Equidistantes, Fig. 5.1, Submetida a uma Carga Uniformemente Distribuída q.

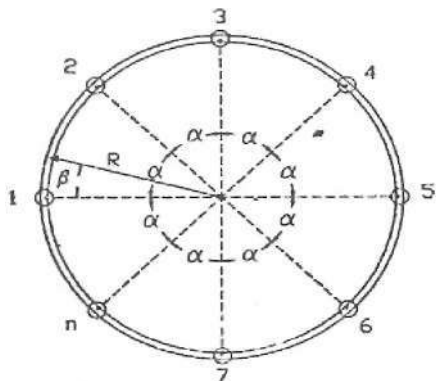


FIGURA 5.1 — Viga Circular Fechada

- Momento fletor nos pilares: $M_z = a_1 \cdot q \cdot R^2$
- Momento fletor no meio do vão: $M_z = a_2 \cdot q \cdot R^2$
- Momento torçor máximo: $M_t = a_3 \cdot q \cdot R^2$ ($p/\beta = \beta_{m\acute{a}x}$)

TABELA 5.1 — Coeficientes a_1 , a_2 e a_3 função do valor de n

n	α	a_1	a_2	$\beta_{m\acute{a}x}$	a_3
2	180°	-1.0000	0.57080	50.46°	0.330674
3	120°	-0.3954	0.20920	34.21°	0.082768
4	90°	-0.2146	0.11072	25.80°	0.033125
5	72°	-0.1352	0.06896	20.69°	0.016567
6	60°	-0.0931	0.04720	12.27°	0.009468
7	51.43°	-0.0681	0.03438	14.81°	0.005918
8	45°	-0.0519	0.02617	12.97°	0.003946
9	40°	-0.0409	0.02060	11.53°	0.002762
10	36°	-0.0331	0.01664	10.38°	0.002009
11	32.73°	-0.0273	0.01372	9.44°	0.001507
12	30°	-0.0230	0.01152	8.65°	0.001159
13	27.69°	-0.0195	0.00980	7.99°	0.000911
14	25.71°	-0.0168	0.00844	7.42°	0.000729
15	24°	-0.0147	0.00735	6.92°	0.000592
16	22.5°	-0.0129	0.00645	6.49°	0.000487
17	21.18°	-0.0114	0.00571	6.11°	0.000406
18	20°	-0.0102	0.00510	5.77°	0.000342
19	18.95°	-0.0091	0.00457	5.47°	0.000291
20	18°	-0.0082	0.00412	5.19°	0.000249

5.2 — Viga Circular de Raio R Bi-engastada a Flexão e a Torção, Fig. 5.2, Submetida a uma Carga Uniformemente Distribuída q.

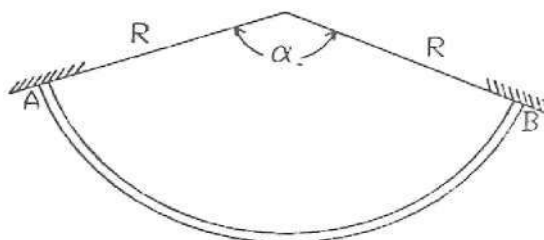


FIGURA 5.2 - Viga Circular Bi-engastada (Tab. 5.2)

5.2.1 — Exemplo de Aplicação da Tab. 5.2

Seja uma viga curva bi-engastada de concreto armado ($E = 2,88 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$, $V = 0.20$) com seção retangular ($b = 0.15 \text{ m}$, $h = 0.60 \text{ m}$), sendo que, o ângulo de abertura é de 60° e o raio de 8m, submetida a uma carga uniformemente distribuída de 1.5 tf/m.

Solução

$$G = \frac{E}{2 \times (1 + \nu)} = \frac{2,88 \times 10^6}{2 \times (1 + 0,20)} = 1,2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$I_z = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0,15 \times (0,6)^3}{12} = 0,0027 \text{ m}^4$$

$$K_t = \frac{h \times b^3}{3} [1 - 0,63 \times (\frac{b}{h}) + 0,052 \times (\frac{b}{h})^5] = 0,00056872 \text{ m}^4$$

$$E \times I_z = 7776 \text{ tf} \times \text{m}^2 \quad (\text{concreto não fissurado})$$

$$G \times K_t = 682,44 \text{ tf} \times \text{m}^2 \quad (\text{concreto não fissurado})$$

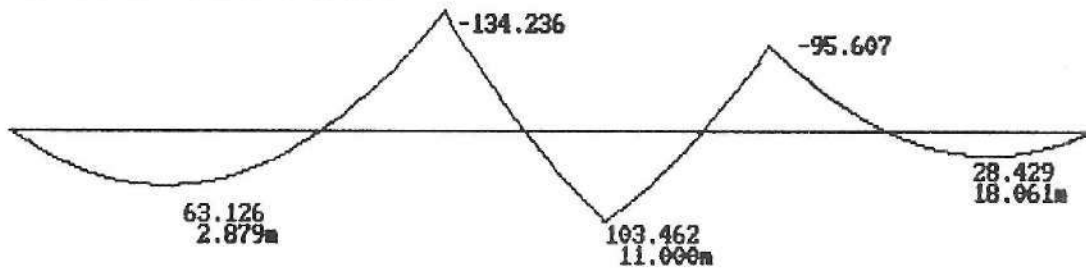
$$E \times I_z / 3 = 2592 \text{ tf} \times \text{m}^2 \quad (\text{concreto fissurado})$$

$$G \times K_t / 6 = 113,74 \text{ tf} \times \text{m}^2 \quad (\text{concreto fissurado})$$

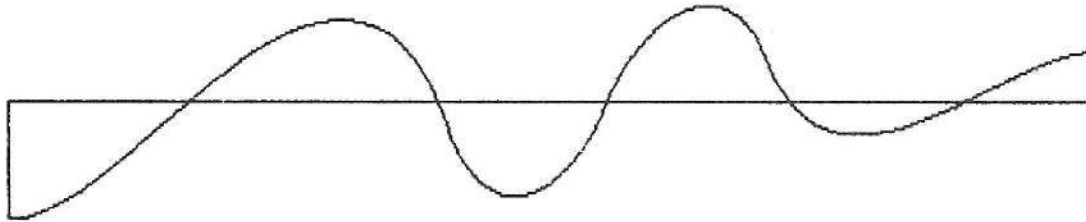
$$\lambda = \frac{E \times I_z}{G \times K_t} = 22,8 \quad (\text{concreto fissurado})$$

Tab. 5.2	$a_1 = 10,513$	$M_z = -10,093 \text{ tf} \times \text{m}$
$\alpha = 60^\circ$	$a_2 = 3,329$	$M_z = 3,196 \text{ tf} \times \text{m}$
$\lambda = 23$	$a_3 = 0,695$	$M_t = 0,667 \text{ tf} \times \text{m}$

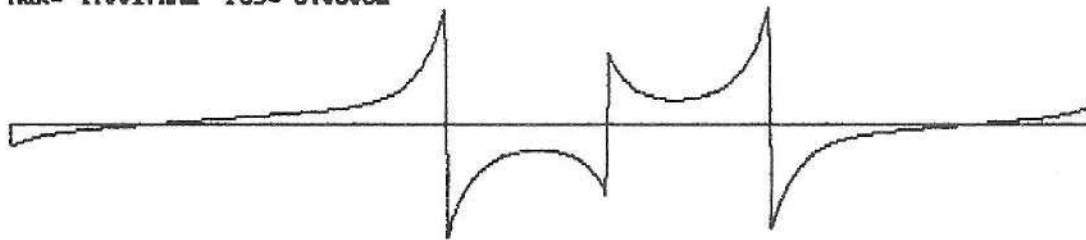
MOMENTOS FLETORES - KN.m
 Nu1. 5.79m 9.48m 12.82m 16.12m



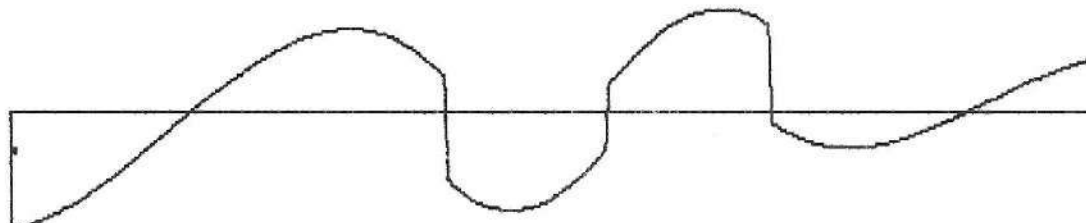
TORCAO ST. VENANT - KN.m
 Max= 9.142 KNm Pos= 0.0000 m



TORCAO EMPENAMENTO - KN.m
 Max= 4.0017KNm Pos= 8.0303m



TORCAO TOTAL - St. Venant + Empenamento - KN.m
 Max= 9.9386KNm Pos= 0.0000m



BI - MOMENTO - KNm2
 Max= 2.5640KNm2 Pos= 8.0000m

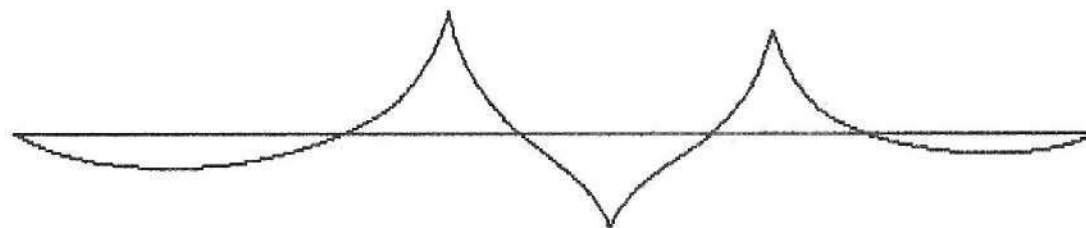


FIGURA 4.5.2 - Diagramas de esforços internos (EXEMPLO 5 - CASO 1)

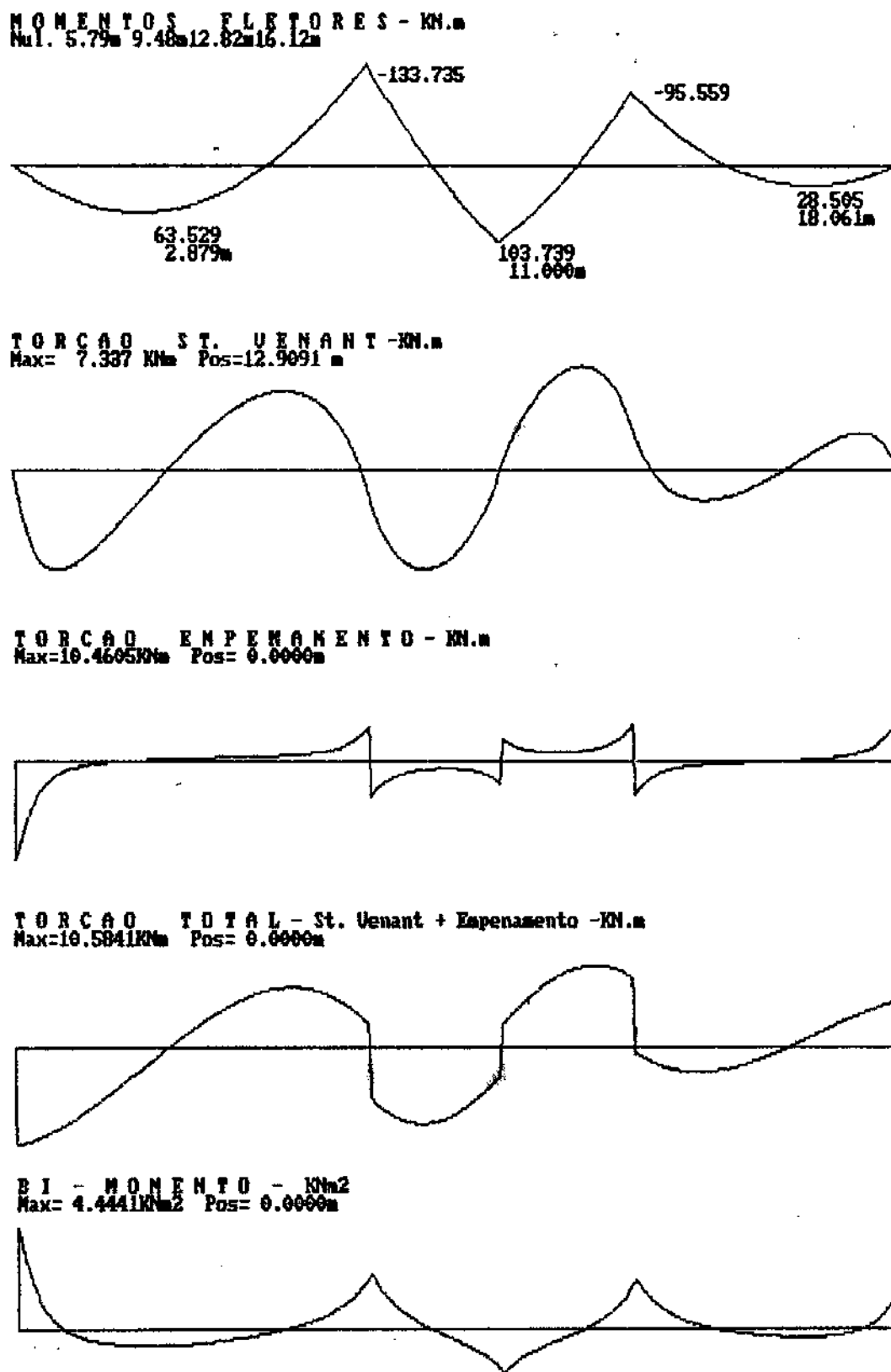
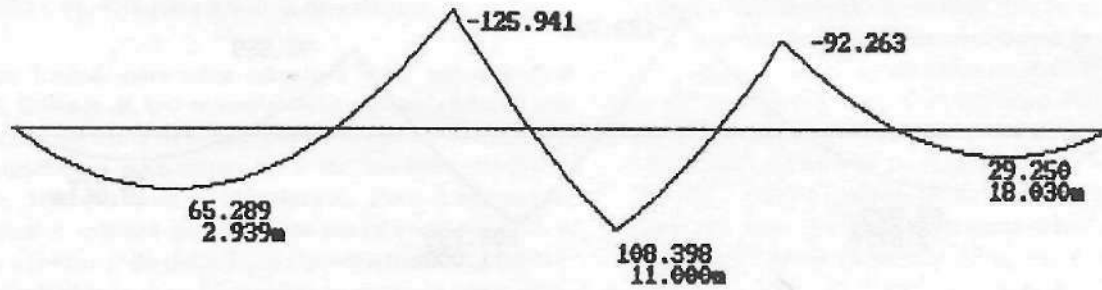


FIGURA 4.5.3 - Diagramas de esforços internos (EXEMPLO 5 - CASO 2)

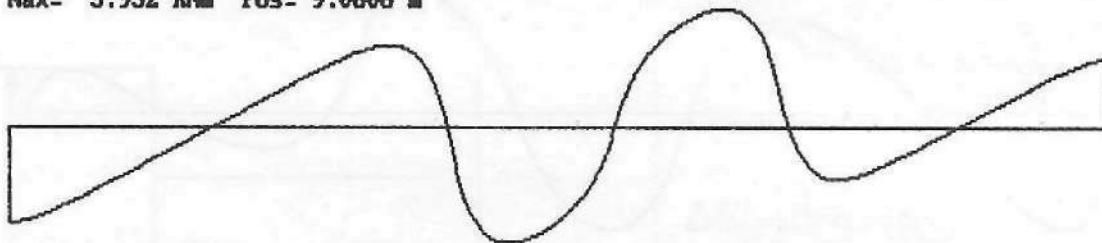
MOMENTOS FLETORES - KN.m

Nu.1. 5.91m 9.42m 12.88m 16.06m



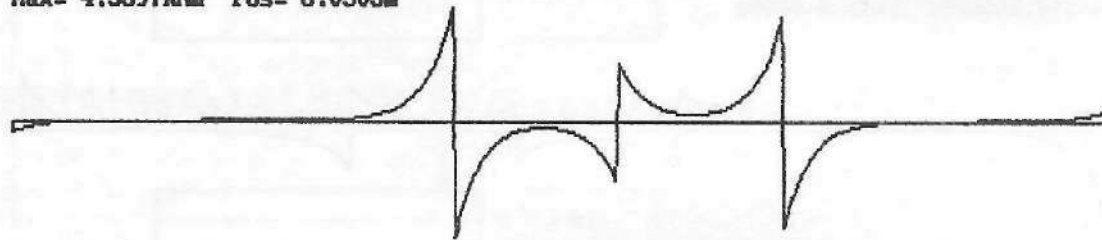
TORCAO ST. VENANT -KN.m

Max= 3.952 KNm Pos= 9.0606 m



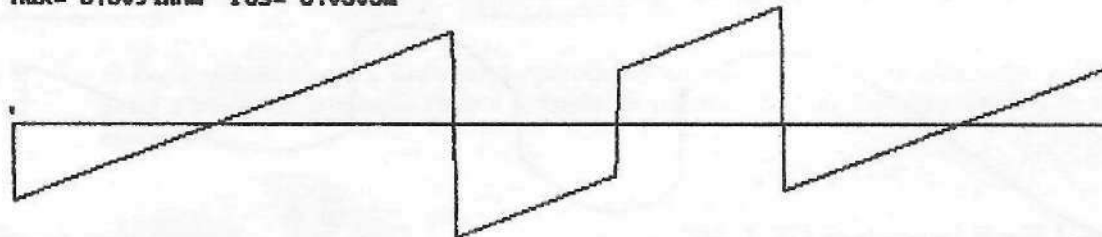
TORCAO EMPENAMENTO - KN.m

Max= 4.5897KNm Pos= 8.0303m



TORCAO TOTAL - St. Venant + Empenamento -KN.m

Max= 5.5094KNm Pos= 8.0303m



BI - MOMENTO - KNm2

Max= 2.0411KNm2 Pos= 8.0000m

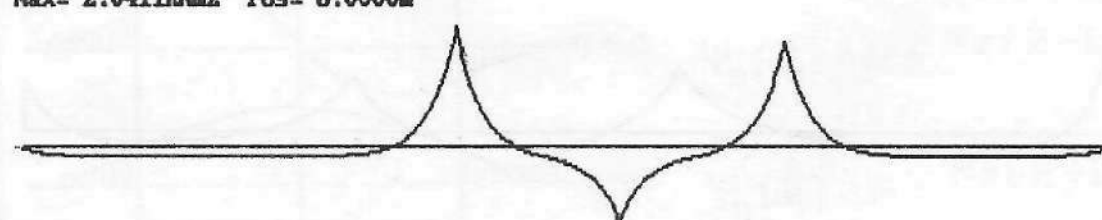


FIGURA 4.5.4 - Diagramas de esforços internos (EXEMPLO 5 - CASO 3)

TABELA 5.2 – Coeficientes a_1 , a_2 e a_3 função do valor de α e $\bar{\lambda}$.

Engastes: $M_z = -a_1 qR^2/100$; Meio do vão: $M_z = a_2 qR^2/100$; Torçor máximo: $M_t \text{máx} = a_3 qR^2/100$

α Graus	$\bar{\lambda} = EI_z/GK_t$														
	0.5	1	2	4	6	8	11	14	17	20	23	26	29	50	
15	a_1	0.57	0.57	0.57	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	0.59	0.59	0.59	0.60
	a_2	0.29	0.29	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.27	0.27	0.27	0.27	0.26
	a_3	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
30	a_1	2.31	2.32	2.33	2.34	2.36	2.37	2.39	2.41	2.43	2.44	2.46	2.47	2.48	2.54
	a_2	1.14	1.13	1.12	1.10	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	1.00	0.98	0.97	0.96	0.90
	a_3	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.10	0.10	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08
45	a_1	5.27	5.29	5.33	5.41	5.47	5.52	5.59	5.64	5.69	5.72	5.76	5.78	5.81	5.92
	a_2	2.54	2.51	2.47	2.39	2.32	2.26	2.19	2.13	2.09	2.05	2.01	1.98	1.95	1.83
	a_3	0.38	0.37	0.36	0.34	0.33	0.32	0.30	0.29	0.28	0.27	0.27	0.26	0.26	0.30
60	a_1	9.54	9.60	9.71	9.89	10.02	10.13	10.25	10.34	10.41	10.47	10.51	10.55	10.59	10.73
	a_2	4.46	4.38	4.26	4.05	3.90	3.78	3.64	3.53	3.45	3.38	3.33	3.28	3.25	3.08
	a_3	0.87	0.85	0.81	0.76	0.71	0.68	0.64	0.62	0.64	0.69	0.70	0.72	0.74	0.82
75	a_1	15.23	15.36	15.57	15.88	16.09	16.24	16.40	16.52	16.61	16.67	16.73	16.77	16.81	16.95
	a_2	6.85	6.69	6.42	6.03	5.77	5.59	5.37	5.23	5.12	5.03	4.97	4.91	4.86	4.68
	a_3	1.64	1.59	1.49	1.36	1.27	1.21	1.30	1.39	1.50	1.51	1.56	1.59	1.61	1.73
90	a_1	22.46	22.68	23.00	23.43	23.69	23.87	24.05	24.17	24.26	24.33	24.38	24.42	24.46	24.59
	a_2	9.65	9.35	8.89	8.29	7.92	7.67	7.41	7.24	7.11	7.02	6.94	6.88	6.84	6.64
	a_3	2.71	2.59	2.41	2.17	2.23	2.41	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.96	3.00	3.13
105	a_1	31.35	31.64	32.06	32.55	32.82	33.00	33.17	33.29	33.36	33.42	33.47	33.51	33.53	33.65
	a_2	12.77	12.29	11.61	10.81	10.35	10.06	9.78	9.59	9.46	9.36	9.29	9.23	9.18	9.00
	a_3	4.07	3.85	3.55	3.72	4.08	4.31	4.54	4.69	4.79	4.87	4.92	4.97	5.01	5.16
120	a_1	41.97	42.30	42.74	43.21	43.46	43.61	43.75	43.84	43.91	43.95	43.99	44.01	44.04	44.12
	a_2	16.07	15.40	14.52	13.58	13.08	12.78	12.50	12.32	12.19	12.10	12.03	11.97	11.93	11.76
	a_3	5.68	5.34	5.55	6.36	6.79	7.05	7.30	7.45	7.56	7.64	7.70	7.75	7.79	7.93
135	a_1	54.31	54.62	55.00	55.38	55.56	55.67	55.77	55.83	55.87	55.90	55.92	55.94	55.96	56.01
	a_2	19.39	18.57	17.58	16.61	16.13	15.85	15.59	15.43	15.32	15.24	15.18	15.13	15.10	14.95
	a_3	7.51	8.26	9.18	10.08	10.52	10.78	11.02	11.17	11.27	11.34	11.40	11.44	11.48	11.61
150	a_1	68.29	68.50	68.75	68.96	69.07	69.13	69.18	69.21	69.23	69.25	69.26	69.27	69.28	69.31
	a_2	22.53	21.70	20.76	19.91	19.52	19.29	19.09	18.96	18.88	18.81	18.77	18.73	18.70	18.60
	a_3	12.55	13.35	14.25	15.07	15.46	15.67	15.87	15.99	16.08	16.13	16.18	16.21	16.24	16.35
165	a_1	83.65	83.73	83.81	83.88	83.91	83.93	83.95	83.96	83.96	83.97	83.97	83.97	83.98	83.98
	a_2	25.26	24.66	24.02	23.49	23.25	23.11	22.99	22.92	22.87	22.84	22.81	22.79	22.77	22.71
	a_3	19.80	20.40	21.03	21.56	21.80	21.93	22.05	22.12	22.17	22.20	22.23	22.25	22.27	22.33
180	a_1	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99
	a_2	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32	27.32
	a_3	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76	29.76

Obs.: Para $\alpha = 150^\circ$ e 180° os momentos torçores são máximos nos engastes, e os demais valores são máximos no vão. Para o concreto armado, deve-se utilizar o valor de $\bar{\lambda}$ levando em conta o estado fissurado, tanto na flexão como na torção.

6 - CONCLUSÃO

O método numérico empregado, Diferenças Finitas Centrais, mostrou ser uma ferramenta precisa e confiável, observando uma excelente correlação nos exemplos analisados.

No exemplo 3 e na Tabela 5.1 salienta-se a diferença significativa nos esforços para diferentes relações entre

a rigidez a flexão e a torção (EI_z/GK_t).

Este trabalho propõe uma tabela que possa ser utilizada por profissionais da área para a obtenção dos esforços internos solicitantes (Momentos Fletores e Torçores). A Tabela 5.1 corresponde a uma viga (ponte) curva bi-engastada a flexão e a torção, quando o ângulo de abertura da viga curva varia de 15 a 180 graus e a relação entre a rigidez a flexão e a torção (EI_z/GK_t) varia de 0.5 a 50.

CARBONARI, G. Static analysis of open thin walled curved continuous beams. *Semina*, v. 12, n. 4, p.189-204, Dec. 1991.

ABSTRACT

This paper presents a numerical solution to the differential equations resulting from Vlasov Theory of nonsymmetric curved beams with thin walled open cross section. A linear elastic structural behaviour is admitted and the static analysis is performed by using the Method of Central Finite Difference to solve the referred differential equations. Due to the beam curvature, the analysis involves the coupling between bending and torsion, and both Saint-Venant and warping torsions are taken into account. Beams with any combination of the boundary conditions and intermediary supports are considered, including pinned or fixed ends in torsion and bending. Numerical results obtained through a computer program implemented in a PC - compatible microcomputer system are compared to other technical references, presenting Showed a good correlation.

KEY-WORDS: *Curved Beams, Static Analysis, Open Cross, Thin Walled.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 – CARBONARI, G. *Análise Dinâmica de Vigas Assimétricas em Curva com Parede Fina e Aberta Submetida à Ação de Cargas Móveis*. Tese de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Dezembro, 1986.
- 2 – VLASOV, V.Z. *Thin-walled elastic beams*. 2. ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- 3 – TAMAGNA, A. & HENNEMANN, J.C.F. *Propriedades Geométricas de seções Abertas de Pequena Espessura*. Caderno Técnico CT-36/83, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFRGS, Janeiro, 1983.
- 4 – HIRSCHFELD, K. *Estática en la Construcción*. Editorial Reverté, Barcelona, Espanha, 1975.
- 5 – COURTAND, M. & LEBELLE, P. *Formulaire de Béton Armé*. Paris, 1976. v.2.

Recebido para publicação em 28/4/1992