MEDIDAS FUZZY

ALEXANDRE MORETTO RIBEIRO[1]
CIRCE MARY SILVA DA SILVA[2]

RIBEIRO, A.M.R.; SILVA, C.M.S. da. Medidas fuzzy. **Semina:** Ci. Exatas/Tecnológicas, Londrina, v. 16, n. 4 p. 505-512, dez. 1995.

RESUMO: *O presente artigo apresenta de maneira introdutória a noção de medida fuzzy, surgida em 1973 em um trabalho de Sugeno. Inicialmente estabelece-se a distinção entre conjuntos fuzzy e medidas fuzzy, tomando como ponto de partida os diferentes tipos de incerteza que surgem quando procuramos formalizar o conhecimento. Entre as várias classes de medida fuzzy, discute-se a medida de credibilidade e a medida de plausibilídade, bem como a importante regra de Dempster.*

PALAVRAS-CHAVE: *Medida fuzzy, medida de credibilidade, medida de plausibilídade, atribuição básica, regra de Dempster.*

1. Incerteza

Muitas vezes a manipulação do conhecimento encontra obstáculos devido à incerteza que o acompanha. Esta incerteza pode manifestar-se de diferentes formas:

Uma forma de incerteza, bastante comum na língua natural, diz respeito à imprecisão, ou a não especificidade do conhecimento. O fato de haver incerteza não implica, necessariamente, em perda de significado ou precisão.

Outro tipo de incerteza está relacionado com a ambigüidade existente junto ao conhecimento. Este tipo de incerteza se refere a confusão, dissonância ou não especificidade nas evidências.

O primeiro tipo de incerteza pode ser tratado usando-se *conjuntos fuzzy*, enquanto no segundo pode-se utilizar as *medidas fuzzy.* Uma distinção, informal, entre estes dois formalismos, e como eles podem ser utilizados, será apresentada na próxima seção. No restante do capítulo serão abordadas as medidas fuzzy.

2. Distinção entre Conjuntos Fuzzy e Medidas Fuzzy

Como foi apresentado na seção anterior, os conjuntos e as medidas fuzzy são formaíismos que permitem manipular diversas formas de Incerteza.

O objetivo desta seção é deixar clara a distinção entre estes dois formaíismos, bem como as suas respectivas aplicações.

Dado um elemento particular de um conjunto universal em questão, cuja pertinência nos vários subconjuntos deste conjunto universal não são conhecidos com certeza, entende-se como uma medida fuzzy uma função que atribui um grau para cada um destes subconjuntos. Este grau (valor numérico entre 0 e 1) indica o grau de evidência, ou certeza subjetiva, com que o elemento pertence ao subconjunto.

A medida fuzzy é, portanto uma função:

$$g: P(X) \rightarrow [0, 1]$$
$$A \rightarrow g(A)$$

onde X é o conjunto universo e A é um elemento de P(X). A função g associa a cada subconjunto crisp A, de X, um número no intervalo [0,1], significando o grau de evidência ou crença que um elemento particular x, de X, pertença ou não ao conjunto A.

Nos conjuntos tratados aqui não existe "vagueza" (fuzziness) associada aos seus limites. O subconjunto para o qual for associado o mais alto valor representa a melhor conjectura concernente ao elemento particular em questão.

A notação g(A) para representar este valor não parece ser a mais adequada, uma vez que o elemento x não aparece explicitamente representado. Todavia, para manter conformidade com a maioria dos textos de referência, será utilizada apenas a notação g(A).

Para exemplificar o uso de conjuntos e medidas fuzzy, serão apresentados a seguir alguns problemas modelados utilizando estes dois formaíismos.

Problema 1: Neste problema a idade da pessoa

1. Alexandre Moretto Ribeiro é professor do Departamento de Informática da Universidade de Caxias do Sul e mestre em Computação pela Universidade Federai do Rio Grande do Sul.

2. Circe Mary Silva da Silva é professora titular do Departamento de Matemática e Estatística da Universdidade de Caxias do Sul e doutora em Educação Matemática da Universidade de Bielefeld, Alemanha.

em questão é conhecida, a questão é saber como classificar esta pessoa nos conjuntos *jovem, adulto* ou *velho,* conjuntos estes que envolvem na sua conceituação uma certa subjetividade. Neste caso a idade da pessoa em questão é conhecida, enquanto o limite dos conjuntos é vago. Para resolver este problema serão utilizados conjuntos difusos.

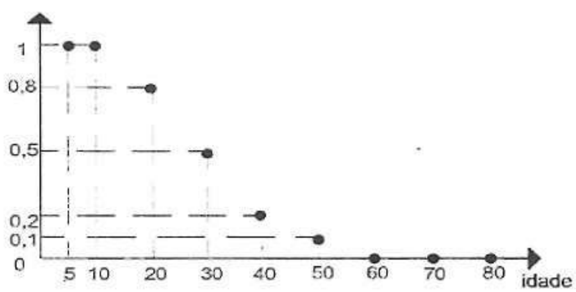
Seja X o conjunto de idade de pessoas :

$$X = \{ 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 \}$$

e o conjunto fuzzy A intitulado, ou nomeado, *"serjovem",* e seja

$$\mu A: X \rightarrow [0,1]$$
$$\mu A(x) = 1.0 \text{ se } x < 20$$
$$\mu A(x) = 0.8 \text{ se } x = 20$$
$$\mu A(x) = 0.5 \text{ se } x = 30$$
$$\mu A(x) = 0.2 \text{ se } x = 40$$
$$\mu A(x) = 0.1 \text{ se } x = 50$$
$$\mu A(x) = 0.0 \text{ se } x > 50$$

ou, graficamente:



Aqui o conjunto fuzzy "ser jovem" é um conjunto com fronteiras indefinidas, uma pessoa de 40 anos pertence a este conjunto com grau 0.2; não é o mesmo sentido de pertinência existente nos conjuntos clássicos.

Da mesma forma que foi definida uma função de pertinência associada ao conjunto "ser jovem", poderia ter sido definida uma função mB: *X* —> [0,1] associada ao conjunto *B* "ser adulto".

Problema 2: Um outro problema que manipula, de maneira distinta, a idade de pessoas, consiste em determinar se a pessoa possui entre 20 e 30 anos, entre 30 e 40 anos, entre 40 e 50 anos ou entre 50 e 60 anos.

O objetivo é, dado um conjunto de evidências, determinar se uma pessoa se encontra na faixa dos 20 anos (isto é, com idade entre 20 e 30 anos), dos 30 anos, dos 40 anos ou dos 50 anos.

Considere o conjunto X das idades de pessoas, e conjuntos A_i (subconjuntos disjuntos de X), representando as faixas etárias.

$$A_{20} = \{ y \in X / 20 \leq y < 30 \}$$
$$A_{30} = \{ y \in X / 30 \leq y < 40 \}$$
$$A_{40} = \{ y \in X / 40 \leq y < 50 \}$$
$$A_{50} = \{ y \in X / 50 \leq y < 60 \}$$

A função g é definida de *P(X)* em [0,1]; para os demais conjuntos que não foram nomeados, supõe-se que g(Aj) = 0.

A cada subconjunto é associado um valor, por exemplo:

$g(A_{20}) = 0.2$, $g(A_{30}) = 0.6$, $g(A_{40}) = 0.l$ e $g(A_{50}) = 0.1$.

Quando dizemos que g (A20) = 0-2 isto significa que o grau de evidência que uma certa pessoa *x* pertença ao conjunto das pessoas com idade na faixa dos 20 anos é 0.2.

O conjunto ao qual atribuirmos o maior valor, neste caso A30, representa a melhor conjectura da faixa de idade que a pessoa se encontra; o próximo maior valor indica o grau de certeza associado com a próxima melhor estimativa, no caso A_{20}, e assim por diante.

A função *g,* que a cada um destes conjuntos, associa um valor *g(A),* em [0,1], consiste numa medida fuzzy representando a incerteza associada com várias alternativas bem definidas. Isto difere do caso onde o problema é formulado usando conjuntos fuzzy, onde é conhecida a idade da pessoa e deseja-se determinar o grau em que ela é considerada *jovem, adulta* ou *velha.*

Problema 3: Suponha que se queira diagnosticar um paciente doente. Pode-se tentar determinar se o paciente pertence ao conjunto das pessoas com pneumonia, bronquite, efisema ou gripe comum.

$$B = \{x \in X: x \text{ tem bronquite}\}$$
$$P = \{x \in X: x \text{ tem pneumonia}\}$$
$$E = \{x \in X: x \text{ tem efisema}\}$$
$$G = \{x \in X: x \text{ tem gripe}\}$$

Após um exame físico, o médico pode chegar a algumas evidências não conclusivas. Pode-se associar um valor alto, como 0.75 a melhor conjectura, neste caso bronquite.

g(B) = 0.75, significa o grau de evidência que o paciente x pertença ao conjunto B, ou seja, tenha bronquite; e g (P) = 0.45; g (E) = 0; g (G) = 0.3.

Estes valores refletem o grau para o qual os sintomas do doente fornecem evidencias de que ele está com uma doença e não com outra. A coleção de todos os pares $(A_i, g(A_i))$, onde $A_i \in \{ B, P, E, G \}$, constitui uma medida fuzzy.

É importante entender como a quantificação desta incerteza, é distinta do vago, ou falta de fronteiras bem definidas que é representado por um conjunto fuzzy.

Problema 4: Suponha que uma pintura antiga foi descoberta e que esta se pareça fortemente com uma pintura de Rafael. Serão assumidas três questões:

1. A pintura descoberta é um autêntico Rafael.
2. A pintura descoberta é um produto de um dos discípulos de Rafael.
3. A pintura descoberta é uma imitação.

Seja X o conjunto de todas as pinturas:

R = {x ∈ X: x é pintura de Rafael}
D = {x ∈ X: x é pintura de um discípulo de Rafael}
C = {x ∈ X: x é pintura de um imitador de Rafael}

Seja g: $P(X) \rightarrow [0,1]$

g(R) = 0.05	g(D) = 0	g(C) = 0.05
g(R U D) = 0.2	g(R U C) = 0.2	g(D U C) = 0.1
g(R U D U C) = 1.0		

O que significa g(R)? Significa o grau de evidência que o determinado quadro seja um autêntico Rafael. Por outro íado, g(R U C) = 0.2 significa o grau de evidência que certo quadro seja um autêntico Rafael ou seja uma imitação de Rafael. Os conjuntos R, D e C são conjuntos crisp, com fronteiras bem definidas, e g(A) tal que A E P(X) significa o grau de evidência que determinado quadro x pertença ao conjunto A. A função que associa a um dado A o vaior g(A) é uma medida fuzzy.

Analisando os problemas acima, que exemplificam o uso de medidas e conjuntos fuzzy, fica claro que, embora ambos os formalismos manipulem incerteza, o tipo de incerteza representado por uma medida fuzzy não deve ser confundido com a incerteza que é representada por conjuntos fuzzy.

3. **Definição formal de Medida Fuzzy**

A noção de medida fuzzy é oriunda da tese de doutorado apresentada por Sugeno em 1977. Alguns pressupostos teóricos utilizados por Sugeno baseiam-se nos trabalhos de Ohfuet, 1953, sobre "Teoria de Capacidades". A identificação de diferentes tipos de medidas foi amplamente pesquisada por Dubois e Prade (1980), Bacon (1981), e Wirzchon (1982).

O conceito de medida fuzzy permite que sejam identificadas várias classes de medidas, incluindo a medida clássica de probabilidade.

A propriedade mais importante das medidas fuzzy é sua monotonicidade com respeito a subconjuntos. As duas classes mais abrangentes de medidas fuzzy são as medidas de credibilidade e plausibilidade.

Definição: Uma medida fuzzy é uma função definida do conjunto das partes de X (P(X)) em [0,1], isto é, g: *P(X)* —> [0,1], que satisfaz certas condições. Estas condições requeridas são tradicionalmente assumidas como os axiomas usuais da teoria de probabilidades. Quais sejam:

g_1: Axioma de Condições de Fronteira

$g(\phi) = 0$ e $g(X) = 1$

g_2: Axioma de Monotonicidade

$\forall A,\ A \in P(X),\ \forall B,\ B \in P(X)$, se $A \subseteq B$ então $g(A) \leq g(B)$

g_3: Axioma da Continuidade

para qualquer sequência monotônica An, An $\in$ P(X) tal que

$\lim_{n \to \infty} A_n \in P(X)$ temos $\lim_{n \to \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to \infty} A_n)$

Os axiomas g_1 e g_2 indicam as propriedades mais características das medidas fuzzy. O axioma g_1 estabelece que, independentemente do grau de evidências, é conhecido que o elemento em questão não pertence ao conjunto vazio e pertence ao conjunto universo. A própria definição de função **g** com domínio em *P(X)* e contradomínio em [0,1] garante que esta é uma função positiva, isto é, **g(A) ≥ 0.**

O axioma *g2* requer que a evidência da pertinência de um elemento a um conjunto precisa ser pelo menos maior ou igual que a evidência que o elemento pertence a qualquer subconjunto daquele conjunto.

O axioma g_3 é aplicável somente a um conjunto universo infinito. Ele pode ser desconsiderado quando o conjunto universo que está sendo tratado é finito. Este axioma requer que, para cada seqüência infinita A_1, A_2, ... de subconjuntos encaixados de X, que converge para o conjunto A = $\lim_{i \to \infty} A_i$, a seqüência de números $g(A_1)$, $g(A_2)$, ... precisa convergir para o valor g(A).

Isto é, se $A_i \xrightarrow[converge]{} A$, então $g(A_i) \xrightarrow[converge]{} g(A)$.

O axioma g_3 pode ser visto como um tipo de exigência de continuidade.

Medidas fuzzy são definidas por axiomas pouco fortes, que incluem medidas de probabilidade como tipos particulares de medida fuzzy.

O axioma *g2* difere significativamente daquele que se encontra na definição de medida de probabilidade. A propriedade da aditividade para as medidas de probabilidade é substituída pela propriedade menos restritiva de monotonicidade.

4. **Tipos de Medidas Fuzzy**

Duas grandes classes de medidas fuzzy são as medidas de credibilidade e as medidas de plausibilidade. Estas medidas são duais, no sentido em que uma pode ser univocamente determinada a partir da outra. As medidas de credibilidade e plausibilidade constituem uma teoria, que é denominada teoria matemática da evidência.

Definição de Medida de Credibilidade: Uma medida de credibilidade é uma função:

Bel: P(X) $\rightarrow$ [0, 1], que satisfaz os seguintes axiomas:

g_1: Bel(ϕ) = 0 e Bel(X) = 1

g_2: Para cada A, B $\in$ P(X) se A $\subseteq$ B então Bel(A) $\leq$ Bel(B)

g_3: Para cada seqüência (A_i) i $\in$ **N** [3] de sub-conjuntos de X, se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ ou $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, isto é, se ($A_i$) i $\in$ **N** é uma seqüência monotônica, então

$$\lim_{i \to \infty} Bel(A_i) = Bel(\lim_{i \to \infty} A_i)$$

g_4:

$$Bel(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup An) \geq \sum Bel(Ai) - \sum_{i<j} Bel(Ai \cap Aj) + \ldots + (-1)^{n+1} Bel(A1 \cap A2 \cap \ldots \cap An)$$

para cada n $\in$ **N** e cada coleção de subconjuntos $A_i \in$ X, i = 1, ..., n.

OBS: g_4 pode ser expresso, também, da seguinte forma:

$$Bel(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap A_i).$$

Para o caso de n = 2, temos a seguinte formulação:

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_{11}) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2)$$

A credibilidade de um conjunto *A* (A $\in$ P(X)), simbolizada por Bei(A), é interpretada como o grau de credibilidade, baseado em evidências disponíveis, que um dado elemento de X pertença ao conjunto *A*.

Uma outra forma de entender o significado da credibilidade é considerar os subconjuntos de X como possíveis respostas a uma questão particular. O conjunto das respostas responde corretamente a questão, mas não se sabe ao certo quais das respostas estão corretas.

Quando os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no axioma g_4 são dois a dois disjuntos, isto é, $Ai \cap Aj = \phi$ se i $\neq$ j, o axioma requer que o grau de credibilidade associado com a união dos conjuntos não seja menor que a soma dos graus de crenças pertencentes a conjuntos individuais.

Exemplo: Se $A_1 \cap A_2 = \phi$ então

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2).$$

3. N está denotando o conjunto dos Números Naturais.

Nota-se, aqui, que o axioma g_4, que caracteriza fundamentalmente uma medida de credibilidade é mais fraco que o axioma equivalente para medidas de probabilidade, onde

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \text{ se } A_1 \cap A_2 = \phi.$$

Isto implica que as medidas de probabilidade sejam casos especiais de medidas de credibilidade, para os quais o axioma g_4 é requerido.

Proposição 1: Seja $Bel: P(X) \rightarrow [0,1]$ uma função, tal que g_1 vale. Se g_4 é válido então g_2 é válido.

Demonstração:

Seja $Bel: P(X) \rightarrow [0,1]$ uma função tal que g_1 e g_4 valem

$$Bel(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap A_i). \quad (1)$$

Sejam A e B $\in$ P(X), supõe-se que A $\subset$ B. (2)

Seja C = B - A (3)

De (2) e (3) tem-se que A $\cup$ C = B e A $\cap$ C = ϕ.(4)

Daí, por (4) $Bel(A \cup C) = Bel(B)$ (5)

De (1) e (5) e g_1 tem-se:

$$Bel(B) \geq Bel(A) + Bel(C) - Bel(A \cap C) = Bel(A) + Bel(C) - 0$$
$$Bel(B) \geq Bel(A)$$

Proposição 2: Seja $A \in P(X)$ e $\overline{A} \in P(X)$ e $Bel: P(X) \rightarrow [0,1]$ uma medida de credibilidade então $Bel(A) + Bel(\overline{A}) \leq 1$.

Demonstração:

Seja $A \in P(X)$ e $\overline{A}$ seu complementar e $Bel: P(X) \rightarrow [0,1]$ uma medida de credibilidade.

Como $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \phi$ e g_4 e g_1 valem, tem-se:

$$Bel(A \cup \overline{A}) \geq Bel(A) + Bel(\overline{A}) - Bel(A \cap \overline{A})$$

Daí, como $Bel(A \cup \overline{A}) = Bel(X) = 1$ tem-se $1 \geq Bel(A) + Bel(\overline{A})$.

Definição de Medida de Plausibilidade: Uma medida de plausibilidade é uma função $Pl: P(X) \rightarrow [0,1]$ que satisfaz os seguintes axiomas:

g_1: Pl(ϕ) = 0 e Pl(X) = 1

g_2: Para cada A, B $\in$ P(X) se A $\subseteq$ B então Pl(A) $\leq$ Pl(B)

g_3: Para cada seqüência A_i, $A_i \in$ P(X) i $\in$ N de subconjuntos de X, se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ ou $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, isto é ($A_i$) i $\in$ N é uma seqüência monotônica, então

$$\lim_{i \to \infty} Pl(A_i) = Pl(\lim_{i \to \infty} A_i)$$

g_5:

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \le \sum Pl(A_i) - \sum_{i<j} Pl(A_i \cup A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

para cada n $\in$ **N** e cada coleção de subconjuntos de X.

Associada a cada medida de credibilidade está a medida de plausibilidade *Pl*, definida pela equação

$$Pl(A) = 1 - Bel(\overline{A}) \qquad (1)$$

para todo $A \in P(X)$ e, similarmente,

$$Bel(A) = 1 - Pl(\overline{A}).$$

Consequentemente, as medidas de credibilidade e plausibilidade são duais.

Proposição 3: Se $A \in P(X)$, $\overline{A} \in P(X)$ e $Pl: P(X) \to [0,1]$ é uma medida de plausibilidade, então

$$Pl(A) + Pl(\overline{A}) \ge 1$$

Demonstração:

Seja $A \in P(X)$ e $\overline{A}$ seu complementar.

$Pl: P(X) \to [0,1]$ é uma medida de plausibilidade, como $A \cup \overline{A} = X$ e $A \cap \overline{A} = \phi$ tem-se, por g_1 e g_5:

$1 = Pl(\overline{A} \cup A) \le Pl(A) + Pl(\overline{A}) - Pl(A \cap \overline{A}) = Pl(A) + Pl(\overline{A})$

Daí,

$$1 \le Pl(A) + Pl(\overline{A})$$

5. Atribuição Básica

Uma forma de expressar as medidas de credibilidade e plausibilidade é através de uma função $m: P(X) \to [0,1]$, chamada de atribuição básica[4].

Definição de Atribuição Básica

m é uma atribuição básica se e somente se $m: P(X) \to [0,1]$ tal que m(ϕ) = 0 e $\sum_{A \in P(X)} m(A) = 1$.

Se $A \in P(X)$, m(A) é interpretado como o grau de evidência de que um elemento específico de X pertença ao conjunto A, mas não a qualquer subconjunto especial de A; ou como o grau em que acredita-se que uma tal exigência é assegurada.

Analisando a definição de atribuição básica, observa-se o seguinte:

i. Não é requerido que m(X) = 1
ii. Não é requerido que m(A) ≤ m(B) quando A ⊂ B.
iii. Não há nenhuma relação entre m(A) e m($\overline{A}$).

A partir destas observações e da definição de medida fuzzy pode-se concluir que a atribuição básica não é uma medida *fuzzy*.

Todavia, é possível relacionar as medidas de credibilidade e plausibilidade com a função atribuição básica como segue:

Se A, B s P(X) então

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \qquad (3)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B) \qquad (4)$$

O significado da relação entre m(A) e Bel(A), expresso na equação (3) diz que m(A) caracteriza o grau de evidência ou credibilidade que o elemento em questão pertença ao conjunto sozinho, enquanto Be!(A) representa a evidência total ou crença que o elemento pertença ao conjunto A bem como aos vários subconjuntos de A.

O significado da relação entre m(A) e Pl{A), expresso na equação (4) diz que Pl{A) representa não somente o total das evidências ou crenças que o elemento em questão pertença ao conjunto A ou a qualquer dos seus subconjuntos, mas também, a evidência adicional ou crença associada a conjuntos que estão envolvidos com A. Dito de outra maneira, Bei(A) é a crença associada a conjuntos B tal que A e B tenham pelo menos um elemento em comum.

De (3) e (4) vê-se claramente que $Pl(A) \ge Bel(A) \quad \forall A, A \in P(X)$.

Definição de Elemento Focal: Para cada $A \in P(X)$, A é dito elemento focal se e somente se m(A) > 0. Quando X é finito, *m* pode ser completamente caracterizado por uma lista de seus elementos focais *A*, com os correspondentes valores m(A).

Definição de Corpo de Evidência: O par (F,m), onde F é o conjunto de elementos focais e *m* é uma atribuição básica, é denominado corpo de evidência.

A função de atribuição básica *m* permite definir a ignorância total.

Definição de Ignorância Total: Se m(A) = 0 para todo A ≠ X e m(X) = 1, isto expressa a ignorância total sobre A. Isto é, sabe-se que o elemento está no conjunto universo mas não tem-se nenhuma evidência sobre a sua locação em qualquer subconjunto de X.

Segue-se da equação (3) que a expressão de total ignorância em medidas de credibilidade é exatamente a mesma, Bel(X) = 1 e Bel(A) = 0 para todo A ≠ X, pois

$Bel(X) = \sum_{B \subseteq X} m(B) = 1$, pois m(B) = 0 se B ≠ X e m(B) = 1 se B = X.

Segue-se da equação (4), que a expressão de ignorância total em medida de plausibilidade é expressa por Pl(ϕ) = 0 e Pl(A) = 1 se A ≠ ϕ.

4. Esta função também é denominada função de densidade de probabilidade (Veja Rich e Knight, 1993, 280) e atribuição de probabilidade básica (Kiir e Folger, 1990, 112).

Definição de função de suporte simples: Uma atribuição básica m é dita uma função suporte simples focada em A se $m(A) = s$, $m(X) = 1 - s$ e $m(B) = 0$ para todos outros conjuntos B em P(X).

A partir do conhecimento da função de credibilidade, pode-se determinar a função de atribuição básica, através da seguinte relação

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B) \qquad (5)$$

para todo conjunto $A \in P(X)$, onde |A - B| denota a cardinalidade do conjunto $A - B$.

Seja

$$\|B\| := |A - B| = \#\{A_i \in P(X); A - B = \bigcup Ai\}$$

Exemplo: Seja X o conjunto de todas as pinturas,
R = {x: x é pintura de Rafael}
D = {x: x é pintura de um discípulo de Rafael}
C = {x: x é pintura de um imitador de Rafael}

Seja $Bel: P(X) \rightarrow [0,1]$ a função definida por:

Bel(R) = 0.005 Bel(D) = 0.0 Bel(C) = 0.05
Bel(R ∪ D) = 0.2 Bel(R ∪ C) = 0.2 Bel(D∪C) = 0.1
Bel(R ∪ D ∪ C) = 1.0
m(R ∪ C) será determinado através da fórmula (5).

$$m(R \cup C) = \sum_{B \subseteq R \cup C} (-1)^{|(R \cup C) - X} Bel(B)$$

Se X = R então |R ∪ C - R| = |C| = 1
Se X = C então |R ∪ C - C| = |R| = 1
Se X = R ∪ C então |R ∪ C - R ∪ C| = 0
m(R ∪ C) = -Bel(R) - Bel(C) + Bel(R ∪ C)
m(R ∪ C) = -0.05 - 0.05 + 0.2 = 0.1

6. Regra de Combinação de Dempster

Supondo que existam duas fontes independentes de informação, por exemplo, de dois especialistas no campo inquirido, expresso por duas atribuições básicas m_1 e m_2. A atribuição básica m_1 é oriunda do especialista 1, e a m_2 é dada pelo especialista 2. Estas duas funções podem ser combinadas para obter-se uma evidência que leve em consideração ambas as informações.

Isto pode ser feito utilizando-se a denominada regra de combinação de Dempster.

$$m_{1,2}(A) := \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B).m_2(C)}{1 - \sum_{B \cap C = \phi} m_1(B).m_2(C)} \quad \text{Se } A \neq \phi$$

e $m_{1,2}(A) = 0$ se $A = \phi$.

Exemplo:

Seja X o conjunto de todas as pinturas,
R = {x: x é pintura de Rafael}
D = {x: x é pintura de um discípulo de Rafael}
C = {x: x é pintura de um imitador de Rafael}.

A tabela a seguir mostra as combinações dos graus de evidência de duas fontes independentes:

Elementos Focais	m_1	m_2	$m_{1.2}$
R	0.05	0.15	0,.21
D	0.00	0.00	0.01
C	0.05	0.05	0.09
R U D	0.15	0.05	0.12
R U C	0.10	0.20	0.20
D U C	0.05	0.05	0.06
R U D U C	0.60	0.50	0.31

Dois especialistas examinaram cuidadosamente uma pintura e atribuiram os graus de evidência m_1 e m_2, respectivamente. O que significa $m_1(R \cup D) = 0.15$? Este valor significa o grau de evidência dado pelo especialista 1 que a pintura analisada havia sido feita pelo próprio Rafael ou que ela tenha sido feita por um de seus discípulos.

Da mesma forma $m_2(R \cup D) = 0.05$ significa o grau de evidência atribuído pelo especialista 2 que a pintura analisada tenha sido obra de Rafael ou um de seus discípulos.

O valor $m_{1,2}(R \cup D) = 0.12$ foi obtido a partir das informações dos dois especialistas, através da regra de Dempster. É claro que haveriam vários outros modos de combinar essas informações, levando em consideração aspectos relevantes destas informações.

É possível estender a definição de atribuição básica para produtos cartesianos.

7. Atribuição básica em um Produto Cartesiano

Antes de definir a atribuição básica num produto cartesiano, é preciso definir a projeção de uma relação sobre um conjunto e a projeção de uma atribuição básica sobre um conjunto.

Rx = {x ∈ X | (x,y) ∈ R para algum y ∈ Y} é a projeção de R em X.

Similarmente,

Ry = {y ∈ Y | (x,y) R para algum x ∈ X} é a projeção de R em Y.

Agora, pode-se definir a projeção m_X de m sobre X pela fórmula $m_x(A) = \sum_{R: A = Rx} m(R)$, para todo $A \in P(X)$ (7.1).

Similarmente, $m_y(B) = \sum_{R: B = Ry} m(R)$, para todo $B \in P(Y)$ (7.2).

Para calcular $m_x(A)$ de acordo com a fórmula acima, somam-se os valores de m(R) para todos os elementos focais R cuja projeção sobre *X é A.* Analogamente, para calcular $m_y(B)$ somam-se os valores de m(R) para todos os elementos focais R cuja projeção sobre *Y* é *B.*

m_x e m_y são chamadas atribuições básicas marginais e (F_x, m_x) e (F_y, m_y) são chamadas corpos marginais de evidência.

Dois *corpos de evidência* (F_X, m_X) e (F_Y, m_Y) são ditos não-iterativos se e somente se $\forall A$, $A \in F_X$ e $\forall B$, $B \in F_Y$ temos

(7.3) $m(A \times B) = m_X(A).m_Y(B)$
e
$m(R) = 0 \ \forall R,\ R \neq A \times B$

A fórmula 7.3 permite calcular a atribuição básica de produtos cartesianos.

Exemplo:

Considerando o corpo de evidência dado na tabela 1, abaixo. Os elementos focais são os subconjuntos do produto cartesíano X x Y onde X = { 1, 2, 3} e Y = {a, b, c} eles estão definidos na tabela a seguir por suas funções características.

Os corpos de evidência marginal estão definidos nas tabelas 2a e 2b.

Explicando melhor as tabelas:

Ex.: Se A = { 2, 3}, B = { b, c} daí A x B = { 2a, 2c, 3b, 3c}

m(R1) = m({ 2b, 2c, 3b, 3c }) = 0.0625

	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	m(Ri)
R_1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0.0625
R_2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0.0625
R_3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0.125
R_4	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0.0375
R_5	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0.075
R_6	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0.075
R_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0.375
R_8	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0.075
R_9	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0.075
R_{10}	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0.075
R_{11}	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0.15
R_{12}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.15

TABELA 1

	X			
	1	2	3	$m_X(A)$
A=	0	1	1	0.25
	1	0	1	0.15
	1	1	0	0.3
	1	1	1	0.3

TABELA 2a

	Y			
	a	b	c	$m_Y(B)$
B=	0	1	1	0.25
	1	0	0	0.25
	1	1	1	0.5

TABELA 2b

Por (7.1)

temos:

$m_X(\{2, 3\}) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) = 0.0625 + 0.0625 + 0.125 = 0.25$

Similarmente, usando (7.2)

temos:

$m_Y(\{b, c\}) = m(R_1) + m(R_4) + m(R_5) + m(R_6) = 0.0625 + 0.0375 + 0.075 + 0.075 = 0.25$

Usando a fórmula (7.3), pode-se calcular a atribuição básica do produto cartesiano:

$m(\{2, 3\} \times \{b, c\}) = m_X(\{2, 3\}) \times m_Y(\{b, c\}) = 0.25 \times 0.25 = 0.0625.$

Vê-se, portanto, que a atribuição básica é univocamente determinada pelas atribuições básicas marginais m_X e m_Y através das fórmulas (7.1) e (7.2).

Exemplo:

Calcule $m_X(\{1,3\})$ e $m_Y(\{b,c\})$ no exemplo anterior.

$m_X(\{1,3\}) = m(R_4) + m(R_7) + m(R_{10}) = 0.0375 + 0.0375 + 0.075 = 0.15$

$m_Y(\{b,c\}) = m(R_1) + m(R_4) + m(R_5) + m(R_6) = 0.0625 + 0.0375 + 0.075 + 0.075 = 0.25$

Observações finais

O conceito de medida fuzzy fornece um amplo sistema, formado por várias classes especiais de medida, que inclue a clássica medida de probabilidade. As duas maiores classes de medida fuzzy são as medidas de credibilidade e plausibilidade. Elas são mutuamente duais no sentido de que uma pode ser univocamente determinada a partir da outra. Juntas elas formam o que se denomina a teoria matemática da evidência. Esta teoria caracteriza-se pelo par de axiomas duais de subaditividade expressos pelo terceiro axioma da definição de credibilidade e do conespondente axíoma da definição de plausibilidade. Os resultados desta teoria foram desenvolvidos por Gienn Shafer, em 1976, este por sua vez motivou-se nos trabalhos sobre probabilidades de Dempster, em 1967. Embora o trabalho de Shafer seja o mais amplo sobre esta teoria, este recebeu contribuições significativas de Bacon, em 1981; Dubois e Prade, em 1982-1986; e muitos outros. Em 1979, Zadeh discutiu a validade da regra de Dempster como uma regra especial e bem justificada para a combinação de evidência.

RIBEIRO, A.M.R.; SILVA, C.M.S. da. Fuzzy measures. Semina: Ciências Exatas/Tecnológicas, Londrina, v. 16, n. 4, p. 505-512, Dec. 1995.

ABSTRACT: In this paper we introduce the notion of fuzzy measure invented by Sugeno in 1973. We start establishing the difference between fuzzy sets and fuzzy measures, based on the several kinds of uncertainty that arise when knowledge is formalised. Among the many classes of fuzzy measures, we study the belief and plausibility measures and the important Dempster rule as well.

KEY-WORDS: *fuzzy sets, belief measure, plausibility measure, Dempster's rule, basic assignment*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. Medidas e Integrais Fuzzy. *Relatório Técnico* 6/ 87. Unicamp. São Paulo.

BIGNOLI, A. *Teoria Elemental de los Conjuntos Borrosos*. Buenos Aires: Academia Nacional de Ingenieria, 1991.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Fuzzy logics and fuzzy control. Int. Jour. on Man-Machine Studies, 1980.

KANDEL, A. *Fuzzy Mathematical Tecniques with Applications*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

KLIR, G.; FOLGER, T. *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Londres: Prentice-Hall International, Inc., 1988.

PEDRYCZ, W. *Fuzzy Control and Systems.* Tauton, Somerset, England: Research Studies Press, 1989.

RICH, E.; KNIGHT, K. *Inteligência Artificial.* São Paulo: Makron Books, 1993.

SCHAFER, G. *A mathematical Theory of Evidence*. Cambridge: Princeton University Press, 1976.

SUGENO, M. *Fuzzy measures and fuzzy integrals - a survey*. Gupta, Saridis and Gaines, 1977, pp. 89-102.

WIERZCHON, S.T. Applications of fuzzy decision-making theory to coping with ill-defined problems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 7, jan. 1982, pp.1-18.

ZADEH, L. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, pp. 338-353.