

ANÁLISE SOBRE A INELASTICIDADE NOS PROCESSOS DE PRODUÇÃO DE MULTIPARTÍCULAS NAS COLISÕES HADRÔNICAS E ALTAS ENERGIAS

ANTÔNIO BRAZ DE PÁDUA¹
CLÉIA GUIOTTI DE PÁDUA¹
JORGE DIAS DE DEUS²

PÁDUA, A. B. de; PÁDUA, C. G. de; DIAS DE DEUS, J. Análise sobre a Inelasticidade nos Processos de Produção de Multipartículas nas Colisões Hadrônicas a Altas Energias. *Semina: Ci. Exatas/Tecnol.* Londrina, v. 18/20, n. 4, p. 3-23, dez. 1997/1999.

RESUMO: O presente trabalho trata-se de uma análise fenomenológica ampla e crítica sobre a questão da inelasticidade nas colisões hadrônicas a altas energias. Como objetivo geral, apresentamos uma discussão no sentido de correlacionar as distribuições da inelasticidade com a distribuição de multiplicidade e com as funções características do espaço do parâmetro de impacto. De forma mais específica, analisamos a dependência energética da inelasticidade média a partir de reações inclusivas de uma partícula e, de correlações com a probabilidade de distribuição de multipartículas e com a função de "overlap" inelástica. Nossos resultados, em todas as tentativas, indicaram um comportamento constante da inelasticidade média com relação à energia. Finalmente, objetivando um trabalho futuro, sugerimos um caminho para investigar a possibilidade de se encontrar uma conexão mais ampla entre a inelasticidade, a multiplicidade e o parâmetro de impacto.

PALAVRAS-CHAVE: Colisão Hadrônica, Altas Energias, Reação Inclusiva, Partícula Líder, Inelasticidade, Inelasticidade Média, Multiplicidade, Parâmetro de Impacto, Dependência Energética, Eiconal, Flutuações na Eiconal, Função de "Overlap" Inelástica e Raio Efetivo de Interação.

1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A INELASTICIDADE NAS COLISÕES HADRÔNICAS A ALTAS ENERGIAS

1.1. Introdução

Desde o início desta década que estamos investigando com mais interesse alguns aspectos fenomenológicos básicos das colisões entre hádrons a altas energias. Em particular, podemos destacar:

- (1) O comportamento assintótico da seção de choque total com relação à energia.
- (2) A dependência energética da inelasticidade média nos processos de produção de multipartículas.
- (3) A probabilidade de distribuição da eiconal nos modelos geométricos formulados no Espaço do Parâmetro de Impacto.
- (4) A dependência energética na eiconal associada ao espalhamento elástico hádron-hádron.
- (5) O método de determinação da razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento hadrônico elástico na direção para frente.

(6) O fator de forma da distribuição da matéria hadrônica.

Numa análise rápida destes temas, é visivelmente óbvio que os dois primeiros tratam do espalhamento global e, como conseqüência disto, estão naturalmente ligados aos processos de produção de multipartículas. Os demais estão diretamente relacionados com a componente elástica do espalhamento. No entanto, se olharmos as colisões a altas energias de um modo mais profundo, podemos ver claramente que todos eles estão fortemente correlacionados. O teorema ótico é um elemento teórico incontestado que nos permite ter esta visão.

Um dos pontos fundamentais do presente trabalho é justamente investigar com mais profundidade o elo existente entre as distribuições de inelasticidade e de multiplicidade (tema 2), a partir das distribuições de funções características no espaço do parâmetro de impacto, como a eiconal e a função de "overiap" inelástica (temas 3, 4 e 6), com o objetivo final de compreender melhor sua dependência com relação à energia.

¹ Departamento de Física - CCE - Universidade Estadual de Londrina, Caixa Postal 6001, PR, Brasil, CEP 86051 -990

² Departamento de Física - Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais 1096, Lisboa Codex, Portugal.

Como a formulação teórica para os processos de produção de multipartículas hoje em dia, vai muito além dos limites da QCD, não estamos interessados em analisar modelos teóricos baseados em constituintes para descrevê-los. Achamos mais natural e mais fácil trabalhar com modelos geométricos, baseados na representação do parâmetro de impacto e , buscar por relações fenomenológicas empíricas para as distribuições de multiplicidade e de inelasticidade.

Gostaríamos de informar que toda base experimental de sustentação para nossas discussões, vem dos dados experimentais obtidos nos aceleradores ISR e COLLIDER do CERN e do TEVATRON do FERMILAB.

Assim, neste trabalho faremos uma análise crítica mais geral sobre o problema da inelasticidade nos processos de produção de multipartículas nas colisões a altas energias e incorporaremos, desde já, algumas de nossas sugestões e propostas na tentativa de pelo menos abordá-lo de modo mais adequado.

1.2. Definição de Inelasticidade

A inelasticidade é uma grandeza física que desempenha um papel muito importante quando se busca obter uma melhor compreensão dos processos de produção de multipartículas nas colisões hádron-hádron a altas energias. A idéia da hadronização universal e características de similaridade nos resultados experimentais, nos leva pensar também, na reação de aniquilação a altas energias na discussão desta grandeza. A inelasticidade é também fundamental para uma análise mais correta dos dados experimentais de raios cósmicos provenientes dos chuviros aéreos ("air showers").

O coeficiente de inelasticidade ou simplesmente inelasticidade (K) é uma grandeza física adimensional definida a partir do conceito de partícula líder ("leading particle") nos processos de colisão.

Suponhamos que dois hádrons, por exemplo, dois prótons, sofrem uma colisão com uma energia total no sistema do centro de massa igual a \sqrt{s} . De modo geral, esta colisão provoca a produção de uma grande variedade de partículas (multipartículas) onde, uma das quais se apresenta

com as mesmas características físicas de um dos hádrons incidentes. Esta é denominada hádron líder, ou **partícula líder**. As demais, por apresentarem características diversas, não recebem quaisquer nomes específicos. Pode ocorrer também, processos com duas partículas líderes, ou seja, semelhantes aos dois hádrons colidentes.

A energia transportada ou absorvida por estes hádrons líderes, pode ser expressa da seguinte forma

$$W^* = (1 - K)\sqrt{s} \quad (1.1)$$

onde, a parte da energia total (\sqrt{s}) gasta(ou disponível) para a produção das outras partículas(partículas secundárias) é igual a

$$W = K\sqrt{s}. \quad (1.2)$$

A constante é definida como coeficiente de inelasticidade ou simplesmente **inelasticidade**. Como $\sqrt{s} = W + W^*$, a inelasticidade pode apenas assumir valores no seguinte intervalo: $0 \leq K \leq 1$.

Vejamos uma discussão mais formal sobre K e suas relações com as colisões pp e e^-e^+ .

A quantidade física básica que governa os processos de produção de multipartículas numa interação hádron-hádron, pp por exemplo, é a **energia hadrônica efetiva total disponível** (W). Esta quantidade é obtida subtraindo-se o quadri-momento invariante total transportado pelos dois prótons líderes do quadri-momento invariante total do estado inicial, ou seja,

$$W = \sqrt{(q_{\text{total}}^{\text{hadronico}})^2} = \sqrt{(q_{\text{total}}^{\text{incidente}} - q_{\text{total}}^{\text{líder}})^2} \quad (1.3)$$

onde

$$q_{\text{total}}^{\text{incidente}} = q_1^{\text{incidente}} + q_2^{\text{incidente}} \quad (1.4)$$

e

$$q_{\text{total}}^{\text{líder}} = q_1^{\text{líder}} + q_2^{\text{líder}}. \quad (1.5)$$

Observação: os índices 1 e 2 usados nas expressões acima e nas próximas, se referem aos dois prótons incidentes e também às duas partículas líderes após a colisão.

Se os momentos transversais dos prótons líderes são desprezíveis temos

$$W = E_1^{\text{hadronica}} + E_2^{\text{hadronica}}. \quad (1.6)$$

Se os eventos são simétricos, ou seja, satisfazem as condições

$$E_1^{\text{hadrônica}} = E_2^{\text{hadrônica}} \equiv E_{\text{had}} \quad e, \quad (1.7)$$

$$\bar{p}_1^{\text{hadrônico}} = -\bar{p}_2^{\text{hadrônico}}$$

obtemos

$$W = 2E_{\text{had}} = 2(\sqrt{s})_{pp} - E^{\text{líder}}. \quad (1.8)$$

De forma mais compacta podemos escrever esta expressão como

$$W = K\sqrt{s}_{pp} \quad (1.9)$$

onde, a inelasticidade é definida pela relação

$$K = 2 \left[1 - \frac{E^{\text{líder}}}{\sqrt{s}_{pp}} \right]. \quad (1.10)$$

No caso da reação de aniquilação e^-e^+ , a grandeza W , dada por

$$W = 2E_{\text{feixe}} = \sqrt{s}_{e^-e^+}. \quad (1.11)$$

Tem-se observado uma grande semelhança entre as colisões pp e e^-e^+ quanto às distribuições de momento inclusivo e de multiplicidade de partículas carregadas, quando se compara os dados experimentais de e^-e^+ do PETRA-COLLIDER do DESY com os de pp do ISR do CERN, nos mesmos valores da energia efetiva total disponível (W) para a produção de partículas. Formalmente, isto significa fazer uma comparação com esta grandeza satisfazendo à seguinte condição de energia para os dois tipos de colisões:

$$K\sqrt{s}_{pp} = W = \sqrt{s}_{e^-e^+}, \quad (1.12)$$

ou ainda, de forma equivalente e mais transparente

$$\sqrt{s}_{pp} - 2E^{\text{líder}} = W = \sqrt{s}_{e^-e^+}. \quad (1.13)$$

Como a inelasticidade K está ligada diretamente à energia hadrônica de produção (E_{had}) pela expressão $2E_{\text{had}} = K\sqrt{s}_{pp}$ e, desde que, E_{had} varia de evento para evento

para \sqrt{s} fixa, é necessário introduzir uma função de probabilidade de distribuição de inelasticidade $\chi(s, K)$ com a seguinte normalização

$$\int_0^1 \chi(s, K) dK = 1. \quad (1.14)$$

Não existe nenhuma derivação teórica completamente satisfatória para $\chi(s, K)$ e a única informação experimental sobre ela foi obtida em 1981 através da reação pp a $\sqrt{s} = 16.5 \text{ GeV}$, cuja distribuição apresentou um valor máximo de $K \sim 0.5$ (Brick et al., 1981).

A inelasticidade média ou 1º momento de K , definida como

$$\langle K \rangle = \int_0^1 K \chi(s, K) dK. \quad (1.15)$$

Se a probabilidade de distribuição de inelasticidade [$\chi(s, K)$] é função da energia, implica pela expressão (1.15) que a inelasticidade média [$\langle K \rangle$] também o é, ou seja, devemos ter [$\langle K(s) \rangle$].

Daqui para frente, denotaremos a probabilidade de distribuição de inelasticidade por $P_K(s)$ e não mais por $x(s, K)$ como fizemos até agora. Esta nova notação é mais coerente as várias representações de outras probabilidades que analisaremos na última etapa do trabalho.

1.3. Dependência Energética da Inelasticidade Média

Desde o início dos anos oitenta a dependência energética na inelasticidade tem sido um tema de grande interesse na investigação fenomenológica dos processos de produção de multipartículas através de diversos tipos de colisões entre partículas elementares a altas energias.

Do ponto de vista experimental, à energias menores ou iguais as do ISR do CERN, ou seja, na região de energias da ordem de GeV, a inelasticidade é determinada diretamente a partir da distribuição de momento das partículas líderes, que mostra uma distribuição aproximadamente uniforme com um valor médio em torno de 0.5 (Basile et al., 1983). Na região de energias da ordem de TeV, obtidas nos aceleradores COLLIDER

do CERN e TEVATRON do FERMILAB, muito pouco se conhece, devido às dificuldades de medir as partículas líderes emitidas a ângulos muito baixos. Tentativas de se estudar a fração de energia transportada pelas partículas produzidas no FERMILAB não foram conclusivas (Brick et al., 1981). Dos experimentos de raios cósmicos existe uma indicação de que a inelasticidade do pion pode decrescer (Dias de Deus & Pádua, 1993) e que a fração da energia m , dia dos núcleons líderes não varia significativamente com a energia (Bellandi et al., 1990).

Com relação aos modelos, a questão ainda permanece indefinida e polêmica, pois os resultados encontrados são os mais diferentes e variados. Em alguns modelos (Fowler et al., 1984; Fowler et al., 1987; Friedlander & Weiner, 1983) a inelasticidade decresce quando a energia da colisão aumenta. Nos modelos (Dias de Deus, 1985; Gaisser & Stanev, 1989; Kopeliovich et al., 1989), que são baseados na observação de que a opacidade cresce nas colisões a altas energias e na produção de "QCD jets" de grandes p_T , a inelasticidade cresce com s , mesmo que moderadamente como no modelo de Gaisser & Stanev (1989).

Vários outros estudos foram feitos a partir dos dados experimentais das distribuições de produção de multipartículas nas regiões de GeV e TeV (Alner et al., 1986; Bellandi et al., 1993; Dias de Deus, 1985; Linkai & Qingqi, 1992; Wdowczyk & Wolfendale, 1984). Os resultados encontrados, também mostram discordâncias no comportamento de $[(K(s))]$ quando s cresce. Nos trabalhos das referências Alner et al. (1986), Lindai & Qingqi (1992) e Wdowczyk & Wolfendale (1984), a inelasticidade decresce, em Dias de Deus & Pádua (1993) permanece constante e, em Bellandi et al. (1993) cresce acentuadamente.

Lembramos que apesar de tantos trabalhos sobre a inelasticidade, ainda não se conseguiu expressar de modo definitivo o seu comportamento com relação à energia.

1.4. Função Probabilidade de Distribuição da Inelasticidade

Como se vê, um dos caminhos para o cálculo ou estudo da inelasticidade média $[(K)]$ passa obviamente pelo estudo da probabilidade de distribuição da inelasticidade $[P_K(S)]$.

Uma expressão empírica comumente utilizada para representa-la tem a forma da distribuição beta, ou seja

$$P_K(s) = \frac{K^{a-1}(1-K)^{b-1}}{\beta(a,b)}, \quad (1.16)$$

onde:

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a,b)}. \quad (1.17)$$

Substituindo as expressões (1.16) e (1.17) em (1.15) obtemos

$$\langle K \rangle = \frac{a}{a+b}, \quad (1.18)$$

onde se vê que a dependência energética em deve estar contida nos parâmetros a e b .

Ajustando-se a expressão (1.16) aos dados experimentais referentes às colisões pp a $s = 16.5$ GeV obtém-se $a = b = 2.5$. Estes valores levam a $\langle K \rangle = 0.5$ quando substituídos na eq. 1.18.

Alguns autores acreditam que $P_K(S)$ seja um ingrediente essencial para interpretar os eventos de produção de multipartículas. Eles procuram obter informações sobre a probabilidade distribuição de multiplicidade $[P_n(S)]$ a partir da função $P_K(S)$. Esta última é encontrada através da proposição de fórmulas empíricas, como a expressão (1.16), ou por meio de modelos teóricos ou fenomenológicos. Este caminho a nosso ver, não é o mais correto e nem mesmo o mais adequado, porque não temos quase nenhum apoio experimental para testar a função $P_K(s)$.

Nós somos partidários de um procedimento, que é justamente ao contrário, ou seja, a partir do conhecimento da probabilidade de distribuição de multiplicidade procurar compreender a probabilidade de distribuição da inelasticidade. Isto porque, a multiplicidade e a probabilidade distribuição de multipartículas produzidas em colisões a altas energias são muito bem conhecidas atualmente, tanto experimental como teoricamente. Acreditamos assim, que se a partir da função $P_n(s)$ e também de suas correlações com as distribuições no espaço do parâmetro de impacto, conseguirmos encontrar um meio de chegarmos à função $P_K(S)$, estaremos dando um grande passo para calcular a inelasticidade média e solucionar mais a contento o problema da dependência energética.

2. DISTRIBUIÇÃO DE MULTIPLICIDADE NOS PROCESSOS DE PRODUÇÃO DE MULTIPARTÍCULAS

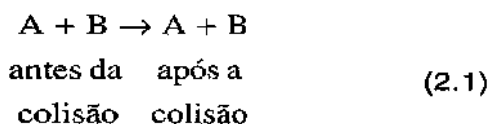
$$\langle n_{\text{total}} \rangle = \langle n_c \rangle + \langle n_{\text{neutras}} \rangle \approx 12 + 6 = (4.7\pi^+ + 4.3\pi^- + 0.43K^+ + 0.32K^- + 1.6p + 0.15\bar{p} + \dots) + (4.5\pi^0 + \dots) \quad (2.4)$$

2.1. Aspectos Básicos sobre a Produção de Multipartículas

Uma interação entre dois corpos, duas partículas elementares no caso, pode ocorrer por meio de uma colisão elástica ou via um processo inelástico.

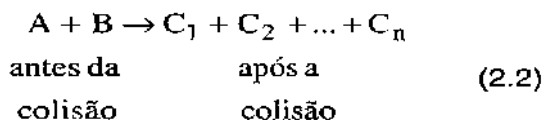
Se considerarmos inicialmente duas partículas A e B, que vão entrar em processo de interação, poderemos ter:

(a) Um processo elástico,



ou seja, as partículas que se interagem são preservadas após a colisão e não há produção de novos estados.

(b) Um processo inelástico absolutamente geral,



onde, C. (i = 1, 2, . . . , n) são n partículas produzidas(multipartículas) após a colisão.

As principais características que se tem observado sobre as interações hádron-hádron a altas energias podem ser resumidas da seguinte forma:

- (i) A maioria das reações são inelásticas, com $\sigma_{el} / \sigma_{tot}$ variando entre 15 e 25%. Isto significa, que de 75 a 85% de uma colisão hádron-hádron, no regime de altas energias, são processos inelásticos.
- (ii) Para cada interação hádron-hádron a multiplicidade média de partículas carregadas $\langle n_c \rangle$ cresce com a energia no centro de massa \sqrt{s} .

Nós não conhecemos uma relação precisa entre $\langle n_c \rangle$ e a energia no sistema do centro de massa, no entanto, a expressão empírica

$$\langle n_c \rangle = a + b \ln(s) = c(s)^n, \quad (2.3)$$

tem proporcionado uma boa descrição dos dados experimentais.

A título de exempla, tomando-se por base a colisão pp a $s = 53 \text{ GeV}$ temos

Como se vê, o estado final é muito complicado devido à grande variedade de novas partículas, ou multipartículas, que são produzidas. Assim, descrever completamente as distribuições de momentos e de ângulos das partículas produzidas numa reação inelástica é uma tarefa praticamente impossível, tanto a nível experimental, como teórico.

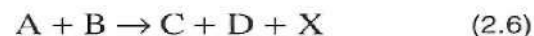
A aproximação mais simples é selecionar uma partícula (**processo inclusivo**) ou mais (**processos semí-inclusivos**), cujas distribuições de ângulo e de momento vão ser examinadas e, integrar sobre os parâmetros cinemáticos das outras partículas restantes.

A reação inclusiva básica é representada da seguinte forma



onde, C é a partícula final que se deseja detectar e analisar e, X simboliza todas as outras partículas produzidas que não serão observadas.

Um processo semi-inclusivo é representado por



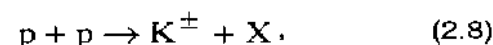
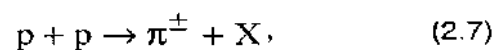
onde, duas espécies de partículas são acompanhadas e observadas, ou seja, C e D.

O termo "inclusiva" se refere, portanto, à inclusão junto de todos estados finais restantes a partícula (ou partículas) específica (ou específicas).

A reação inelástica geral (2.2), denominada exclusiva.

Quando a partícula C na reação (2.5) ou as partículas C e D na reação (2.6) tem as mesmas características das partículas incidentes, elas são chamadas de partícula líder ou partículas líderes, respectivamente.

Exemplos de reações inclusivas com produção de partículas carregadas, que podem ocorrer nos experimentos de colisão pp no ISR - CERN:



$$p + p \rightarrow p + X \quad (2.9)$$

$$p + p \rightarrow \bar{p} + X. \quad (2.10)$$

A reação (2.9) é uma típica reação de partícula líder e o próton produzido é o próton líder.

A distribuição invariante de partícula única C ou a seção de choque invariante é dada por

$$f = E_c \frac{d^3\sigma}{d^3\vec{p}_c} = \frac{E_c}{\pi} \cdot \frac{d^2\sigma}{dp_L dp_T^2} \quad (2.11)$$

onde, $d^3\sigma/d^3\vec{p}_c$ é a seção de choque diferencial (isto é, a probabilidade por unidade de fluxo) de detectar C dentro do elemento de volume no espaço de fase $d^3\vec{p}_c$. E_c é a energia da partícula C no sistema do centro de massa e é incluída para garantir a invariância de f, p_L (momento longitudinal) e p_T (momento transversal) são as componentes de \vec{p}_c ao longo da direção do feixe incidente e perpendicular a ela, respectivamente. Daqui para frente omitiremos a letra C para indicar a partícula detectada numa colisão do tipo (2.5).

A seção de choque invariante pode ser escrita de forma alternativa como

$$f = E \frac{d^3\sigma}{d^3\vec{p}_c} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d^2\sigma}{dy dp_T^2} \quad (2.12)$$

onde, y é a rapidez, definida através da seguinte relação

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right). \quad (2.13)$$

Podemos escrevê-la também em termos da pseudorapidez η como

$$f = E \frac{d^3\sigma}{d^3\vec{p}_c} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d^2\sigma}{d\eta dp_T^2}. \quad (2.14)$$

A pseudorapidez é definida pela expressão

$$\eta \equiv -\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.15)$$

onde, θ é o ângulo de produção ou emissão no sistema de referência do centro de massa.

Se $p \gg m$ e $\theta \gg 1/\gamma$, implica que $\eta \cong y$.

Uma das grandezas físicas que se tem informação é a densidade de partículas produzidas no espaço da pseudorapidez expressa por

$$\rho(\eta) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\eta}. \quad (2.16)$$

Esta é denominada distribuição inclusiva em pseudorapidez.

A outra grandeza importante é a multiplicidade média de partículas produzidas.

A integral da distribuição em pseudorapidez fornece a multiplicidade média de partículas carregadas produzidas

$$\langle n_{ch} \rangle = \int \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\eta} d\eta. \quad (2.17)$$

A grandeza $\langle n_{ch} \rangle$ (onde o índice ch vem de charge, ou seja, carga elétrica) pode ser calculada também através da probabilidade de distribuição de partículas carregadas produzidas $P_n(s)$ da seguinte maneira

$$\langle n_{ch} \rangle = \int_0^\infty n P_n(s) dn, \quad (2.18)$$

com $P_n(s)$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\int_0^\infty P_n(s) dn = 1. \quad (2.19)$$

Por meio da definição da variável $z = n / \langle n \rangle$, podemos definir em função dela a seguinte distribuição de multiplicidade normalizada

$$\phi(z, s) = \langle n \rangle P_n(s). \quad (2.20)$$

Para esta grandeza também existem dados experimentais.

Em 1972 Koba, Nielsen e Olesen (Koba et al., 1972) concluíram em seus estudos, que a distribuição de multiplicidade normalizada, mais especificamente a forma desta distribuição para colisões hádron-hádron, se tornava independente da energia para $s \rightarrow \infty$, isto é:

$$\begin{aligned} \phi(z, s) &\rightarrow \phi(z) \\ (s \rightarrow \infty) & \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esta propriedade é conhecida como Scaling KNO.

Em 1983 G. J. Alner e equipe (Alner et al., 1984) mostraram que os dados experimentais sobre a distribuição de multiplicidade normalizada de partículas carregadas para eventos NSD ("Non Single Diffractive") na interação pp a $s = 546$ GeV, no COLLIDER do CERN, quando analisados em todo intervalo de pseudorapidez, violavam o Scaling KNO. Este tipo de scaling é, aparentemente, observado na região de energias do ISR do CERN em colisões pp.

2.2. Descrição da Distribuição de Multiplicidade

Várias formas de distribuições de probabilidade tem sido usadas para representar e descrever as distribuições de multiplicidade de partículas carregadas produzidas nas colisões hadrônicas a altas energias.

Entre elas podemos destacar as seguintes:

(i) a Distribuição Binomial Negativa (DBN):

$$P_n(\langle n \rangle, k) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k)} \cdot \left(\frac{\langle n \rangle}{k}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\langle n \rangle}{k}\right)^{n+k}} \quad (2.22)$$

(ii) a Distribuição de Furry-Yule (DFY):

$$P_n(\langle n \rangle, k) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k)} \cdot \left(\frac{k}{\langle n \rangle}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{k}{\langle n \rangle}\right)^{n-k} \quad (2.23)$$

A DBN é a mais conhecida e proporciona bons ajustes dos dados experimentais de multiplicidade para as colisões pp com s entre 10 e 60 GeV, ou seja, na região do ISR do CERN e um pouco abaixo e, para pp na região de energia do COLLIDER do CERN com s de 546 GeV e 900 GeV.

Nesta distribuição, a probabilidade de multiplicidade é expressa em termos da variável n , que representa

o número de partículas carregadas produzidas na colisão, e dos parâmetros n e k . n é o valor médio da multiplicidade de partículas carregadas. Ele determina a posição da distribuição. O parâmetro k , em geral, é inteiro, e é responsável pela forma da distribuição.

Este parâmetro depende da energia. Os dados experimentais de pp e pp de 10 a 900 GeV são bem ajustados com k^{-1} representado pela seguinte expressão

$$k^{-1} = a + b \ln \sqrt{s}, \quad (2.24)$$

com $a = -0.104 \pm 0.004$ e $b = 0.058 \pm 0.001$. Com isto, pode-se ver que k decresce com a energia.

Quando k é um inteiro, a DBN é conhecida como distribuição de Bose-Einstein. Em particular quando $k = 1$ temos a distribuição de Bose-Einstein simples, ou seja,

$$P_n(\langle n \rangle, 1) = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \cdot \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle}\right)^n \quad (2.25)$$

No limite de $k^{-1} \rightarrow 0$ (ou $k \rightarrow \infty$) temos a Distribuição de Poisson

$$P_n(\langle n \rangle, \infty) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cdot e^{-\langle n \rangle} \quad (2.26)$$

No limite de altas energias, $n \gg k$, a forma assintótica da DBN pode ser escrita em função da variável de scaling (como já definimos), $z = n/k$ da seguinte forma

$$\phi(z, k) = \langle n \rangle P_n(k) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} \cdot z^{k-1} e^{-kz} \quad (2.27)$$

Para o scaling KNO ser válido nesta aproximação k tem que ser independente da energia. Até $s = 900$ GeV os dados experimentais não apresentam nenhum indício de terem alcançado a assíntopia.

3. INELASTICIDADE E DISTRIBUIÇÕES NO ESPAÇO DO PARÂMETRO DE IMPACTO

3.1. Representação do Parâmetro de Impacto

A representação do parâmetro de impacto para a amplitude de espalhamento elástico, é um formalismo que permite relacionar a seção de choque diferencial elástica, em função do momento transferido ($-t$), com a distribuição da probabilidade de interação, em função do parâmetro de impacto bidimensional (b). Através deste formalismo podemos obter informações preciosas sobre a estrutura das partículas interagentes e do mecanismo de interação.

A amplitude de espalhamento elástico [$f(s, t)$] entre duas partículas, sem spin e a altas energias, é expressa na representação do parâmetro de impacto, pela Transformada de Fourier-Bessel da correspondente amplitude no espaço do parâmetro de impacto [$h(s, b)$], ou seja

$$f(s, t) = \int_0^{\infty} h(s, b) J_0(b\sqrt{-t}) b db. \quad (3.1)$$

A amplitude de espalhamento elástico é de forma geral uma função complexa e pode ser escrita como

$$f(s, t) = \text{Re } f(s, t) + i \text{Im } f(s, t). \quad (3.2)$$

Ela está ligada à seção de choque diferencial elástica [$d\sigma/dt$] pela relação

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |f(s, t)|^2. \quad (3.3)$$

Com base na analogia ótica a função $h(s, b)$ pode ser definida como

$$h(s, b) \equiv i\Gamma(s, b), \quad (3.4)$$

onde $\Gamma(s, b)$ é denominada função de perfil.

A função de perfil está relacionada com a função eiconal (ou simplesmente eiconal) $\chi(s, b)$ pela seguinte expressão

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{i\chi(s, b)}. \quad (3.5)$$

De modo geral, $\Gamma(s, b)$ e $\chi(s, b)$ são funções complexas.

Para uma análise mais detalhada da função eiconal é conveniente escreve-la da seguinte forma

$$\chi(s, b) = \text{Re } \chi(s, b) + i\Omega(s, b) \quad (3.6)$$

onde, $\text{Re } \chi(s, b)$ é a sua parte real e $\Omega(s, b)$ sua componente imaginária. A função $\Omega(s, b)$ é uma função real e é denominada de **opacidade**.

No espalhamento hádron-hádron a altas energias em geral, a parte real da eiconal é muito pequena e, portanto, pode ser considerada como desprezível em comparação com a parte imaginária. Assim, temos $\chi(s, b) \equiv i\Omega(s, b)$. Considerando esta aproximação, vamos daqui para frente, nos referir à opacidade $\Omega(s, b)$ como sendo a própria eiconal.

Finalmente, em condições de altas energias, a amplitude de espalhamento elástico da interação hádron-hádron, pode ser escrita na sua forma mais tradicional e conhecida, através da expressão

$$f(s, t) = i \int_0^{\infty} [1 - e^{-\Omega(s, b)}] J_0(b\sqrt{-t}) b db. \quad (3.7)$$

Unitaridade e Funções de "Overlap"

Além das funções de perfil e da eiconal, podemos definir outras funções no espaço do parâmetro de impacto. Em especial, destacamos as funções de "overlap" total (G_{tot}), elástica (G_{el}) e inelástica (G_{in}), sendo esta última de grande interesse para nós no estudo da inelasticidade.

A importância da função de "overlap", motivada pela simplicidade da condição de unitaridade no espaço do parâmetro de impacto e pelo fato de que a maior parte da seção de choque total é devida aos processos inelásticos. Isto leva à suposição que os processos inelásticos são mais fundamentais do que os elásticos correspondentes. Desta forma, se diz que numa colisão, um processo elástico é a sombra dos processos inelásticos. Diante desta visão, estes dois tipos de processos são inter-relacionados e, conseqüentemente, a amplitude de espalhamento elástico pode ser expressa em termos das contribuintes inelásticas associadas. Estas contribuintes podem ser todas englobadas numa única função, ou seja, na função de "overlap" inelástica.

A seguir apresentaremos os desenvolvimentos matemáticos que permitem ter uma melhor compreensão desta grandeza física.

A conservação da probabilidade implica na unitariedade da matriz S:

$$SS^+ = S^+S = 1. \quad (3.8)$$

A matriz S pode ser escrita em termos da matriz de transição T através da expressão

$$S = 1 + iT. \quad (3.9)$$

Substituindo-se (3.9) em (3.8) obtemos

$$i(T^+ - T) = TT^+ \quad (3.10)$$

e, portanto,

$$2\text{Im}\langle f|T|i\rangle = \sum_k \langle f|T|k\rangle \langle k|T^+|i\rangle. \quad (3.11)$$

O índice k se refere a todos estados elásticos e inelásticos. Esta equação pode ser rescrita separando-se esses estados, da seguinte forma

$$2\text{Im}\langle f|T|i\rangle = \sum_m \langle f|T|m\rangle \langle m|T^+|i\rangle + \sum_n \langle f|T|n\rangle \langle n|T^+|i\rangle \quad (3.12)$$

(elásticos) (inelásticos)

onde, $|m\rangle$ e $|n\rangle$ são os vetores de estados intermediários elásticos e inelásticos, respectivamente.

Finalmente, podemos escrever (3.12) da seguinte forma

$$4\pi \text{Im}f(s, t) = G_{\text{el}}(s, t) + G_{\text{in}}(s, t) = G_{\text{tot}}(s, t), \quad (3.13)$$

Esta é a condição de unitariedade no espaço $-t$.

Para $t=0$, a equação (3.13) se reduz ao **Teorema Ótico**

$$4\pi \text{Im}f(s, 0) = G_{\text{tot}}(s, 0) = \sigma_{\text{tot}}(s), \quad (3.14)$$

onde $G_{\text{el}}(s, 0) = \sigma_{\text{el}}(s)$ e $G_{\text{in}}(s, 0) = \sigma_{\text{in}}(s)$. O Teorema Ótico representa o elo fundamental entre os espalhamentos elástico e inelástico.

A condição de unitariedade pode ser expressa na representação do parâmetro de impacto pela relação

$$G_{\text{tot}}(s, b) = G_{\text{el}}(s, b) + G_{\text{in}}(s, b). \quad (3.15)$$

As funções de "overlap" no espaço do parâmetro de impacto (b) estão relacionadas com as respectivas funções de "overlap" no espaço de quadrimomento (t), já definidas, pelas expressões

$$G_{\text{tot}}(s, t) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{tot}}(s, b) J_0(b\sqrt{-t}) b db, \quad (3.16)$$

$$G_{\text{el}}(s, t) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{el}}(s, b) J_0(b\sqrt{-t}) b db \quad (3.17)$$

e

$$G_{\text{in}}(s, t) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{in}}(s, b) J_0(b\sqrt{-t}) b db, \quad (3.18)$$

com as seguintes normalizações em $-t = 0$:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = G_{\text{tot}}(s, 0) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{tot}}(s, b) b db, \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\text{el}}(s) = G_{\text{el}}(s, 0) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{el}}(s, b) b db \quad (3.20)$$

e

$$\sigma_{\text{in}}(s) = G_{\text{in}}(s, 0) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{in}}(s, b) b db, \quad (3.21)$$

As relações anteriores podem ser rescritas como

$$G_{\text{tot}}(s, b) = \frac{d^2 \sigma_{\text{tot}}(s)}{d^2 b}, \quad (3.22)$$

$$G_{\text{el}}(s, b) = \frac{d^2 \sigma_{\text{el}}(s)}{d^2 b} \quad (3.23)$$

e

$$G_{\text{in}}(s, b) = \frac{d^2 \sigma_{\text{in}}(s)}{d^2 b}. \quad (3.24)$$

Com base nas expressões até aqui estudadas, a condição de unitariedade no espaço do parâmetro de impacto, pode ser escrita na sua forma tradicional, ou seja, em termos das funções de perfil e de "overlap" inelástica como

$$2\text{Re}\Gamma(s, b) = |\Gamma(s, b)|^2 + G_{\text{in}}(s, b), \quad (3.25)$$

onde

$$G_{\text{tot}}(s, b) = 2 \operatorname{Re} \Gamma(s, b) \text{ e } G_{\text{el}}(s, b) = |\Gamma(s, b)|^2.$$

Como já deixamos claro, nos interessa relacionar as funções de "overlap", em especial a inelástica, com a eiconal. Assim, utilizando-se as expressões (3.5), (3.6) e (3.25), podemos encontrar essas relações, que são:

$$G_{\text{tot}}(s, b) = 2(1 - e^{-\Omega(s, b)}), \quad (3.26)$$

$$G_{\text{el}}(s, b) = (1 - e^{-\Omega(s, b)})^2 \quad (3.27)$$

e, especialmente,

$$G_{\text{in}}(s, b) = 1 - e^{-2\Omega(s, b)}. \quad (3.28)$$

3.3. Inelasticidade e a Função de "Overlap" Inelástica

Em 1984 Chou-Yang-Yen (Chou et al., 1985) analisando a distribuição de multiplicidade em termos da pseudorapidez na colisão pp a $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$, concluíram que a energia disponível para a produção de partículas é uma função monotonicamente decrescente do parâmetro de impacto. Na região central $b \sim 0$ esta energia é grande e na região periférica, b grande, esta é bem pequena, pois sua maior parte é levada pelos "jets" de hádrons líderes.

A relação mais simples entre a inelasticidade e o parâmetro de impacto, com base nesta idéia, foi proposta por Dias de Deus (1985), simplesmente identificando a inelasticidade com a função de "overlap" inelástica, ou seja,

$$K(s) \equiv G_{\text{in}}(s, b). \quad (3.29)$$

A função de "overlap" inelástica, como vimos, descreve a probabilidade de se ter uma colisão inelástica e, por isso, deve satisfazer a condição de normalização

$$2\pi \int_0^{\infty} G_{\text{in}}(s, b) b db = 1. \quad (3.30)$$

Pela definição de G_{in} observam-se as seguintes condições: $b \rightarrow 0 \Rightarrow G_{\text{in}} \rightarrow 1$ e $b \rightarrow \infty \Rightarrow G_{\text{in}} \rightarrow 0$. Assim, pela identidade

(3.29), os vínculos de positividade e unitaridade de G_{in} , $0 \leq G_{\text{in}} \leq 1$, são repassados de algum modo para a inelasticidade K , que assume valores no intervalo $1 \leq K \leq 0$.

O aumento observado de $\sigma_{\text{el}} / \sigma_{\text{tot}}$ com a energia, implica que K deve crescer com relação a esta mesma variável.

Os dados experimentais das colisões inelásticas pp e $\pi\pi$ mostram um comportamento de K contrário ao previsto por este modelo.

Uma proposta alternativa, veja em Wilk & Wlodarczyk (1992), é escrever K diretamente em função da eiconal (ou opacidade) como

$$K(s, b) = \left(\frac{\Omega(s, b)}{\Omega_0(s)} \right)^\lambda, \quad (3.31)$$

onde λ é um parâmetro livre que deve ser determinado fenomenologicamente. Esta parametrização leva a $\langle K \rangle = 0.51$ para $\sqrt{s} = 22 \text{ GeV}$ e $\langle K \rangle = 0.46$ para $\sqrt{s} = 63 \text{ GeV}$, ou seja, a inelasticidade média decresce com a energia e tem um valor consistente com a previsão empírica que é de aproximadamente 0.5.

3.4. Inelasticidade e a Probabilidade de Distribuição da Eiconal

Em 1987 Barshay & Goldberg (1987) apresentaram uma generalização para a descrição geométrica no espaço do parâmetro de impacto das colisões hádron-hádron a altas energias.

Basicamente argumentaram que a eiconal não tem um valor definido para cada parâmetro de impacto, mas ela apresenta flutuações em torno de um valor médio, e assim, deve ser caracterizada por uma probabilidade de distribuição.

A idéia básica é supor que o estado de interação de dois hádrons, para cada b , contém uma superposição de muitos componentes envolvendo números diferentes de partons, e isto, leva à noção de uma distribuição de probabilidade da eiconal, ou seja, $P[\Omega(s, b), \langle \Omega(s, b) \rangle]$ onde $\langle \Omega(s, b) \rangle$ é a eiconal (ou opacidade) média para um determinado valor de b . Daqui para frente, para simplificar, escreveremos simplesmente.

Desta forma, a expressão (3.7) para a amplitude de espalhamento elástico é rescrita como

$$f(s, t) = i \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} P(\Omega, \langle \Omega \rangle) (1 - e^{-\Omega}) d\Omega \right] J_0(b\sqrt{-t}) b db \quad (3.32)$$

onde,

$$\langle \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \Omega P(\Omega, \langle \Omega \rangle) d\Omega \quad (3.33)$$

e

$$\langle \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \Omega P(\Omega, \langle \Omega \rangle) d\Omega \quad (3.34)$$

A provável ligação entre a eiconal e a produção de multipartículas nos leva a escolher, como uma primeira aproximação, a seguinte expressão para a distribuição de probabilidade da eiconal

$$P(\Omega, \langle \Omega \rangle) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{\langle \Omega \rangle} \cdot u^{k-1} e^{-ku} \quad (3.35)$$

onde, $u = \Omega / \langle \Omega \rangle$.

A integração da expressão (3.32) na variável eiconal utilizando-se a fórmula (3.35), resulta numa nova forma para a amplitude de espalhamento elástico, ou seja;

$$f(s, t) = i \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\langle \Omega(s, b) \rangle}{k} \right)^k} \right] J_0(b\sqrt{-t}) b db \quad (3.36)$$

Para eiconal média em função do parâmetro de impacto e da energia, tem-se a opção de identificá-la com qualquer uma das várias expressões obtidas por um grande número de modelos fenomenológicos propostos para a eiconal nas três últimas décadas (Pádua, 1989).

Podemos propor uma extensão da distribuição de probabilidade da eiconal para a função de "overlap" inelástica. Assim, a expressão (3.28) seria substituída por

$$\langle G_{in}(s, b) \rangle = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2\langle \Omega(s, b) \rangle}{k} \right)^k} \quad (3.37)$$

Lembramos que este valor médio da função de "overlap" inelástica, não significa um valor médio

calculado ao longo da distribuição do parâmetro de impacto, mas sim um valor médio calculado em cada parâmetro de impacto devido às flutuações desta função neste ponto.

4. PROBABILIDADE DE DISTRIBUIÇÃO DA INELASTICIDADE E INELASTICIDADE MÉDIA

4.1. Principais Modelos e Estudos Existentes

Ao nosso ver, os trabalhos teóricos feitos no sentido de se calcular o comportamento de K com relação a s , se enquadram em duas categorias: modelos fenomenológicos e cálculos feitos de forma independente de modelo utilizando-se dados experimentais de reações inclusivas. Nesta última os cálculos (Alner et al., 1986; Bellandi et al., 1993; Dias de Deus, 1985; Linkai & Qingqi, 1992; Wdowczk & Wolfendale, 1984) normalmente começam a partir da seção de choque inclusiva de uma partícula i

$$\frac{E}{\sigma} \cdot \frac{d^2\sigma}{dp_L dp_T^2} l_i \quad (4.1)$$

onde E é a energia no sistema do centro de massa, p_L o momento longitudinal e p_T o momento transversal. A inelasticidade K_i , dada por

$$K_i(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} \int \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{d^2\sigma}{dp_L dp_T^2} l_i dp_L dp_T^2 \quad (4.2)$$

Em nosso primeiro trabalho sobre a inelasticidade (Dias de Deus & Pádua, 1993), adotamos esta sistemática. Utilizando-se os dados experimentais mais confiáveis de reações inclusivas, propusemos uma generalização da idéia de Wdowczyk & Wolfendale (1984) para tratar a seção de choque normalizada invariante como função das variáveis escalonadas pelas médias. Nossos resultados revelaram que quando as correlações entre o momento transversal (p_T) e a pseudorapidez (η) são tratadas corretamente a inelasticidade do pion permanece praticamente constante na transição da região de energia de GeV para TeV. A extensão dos cálculos às partículas carregadas mostrou que K decresce lentamente com o aumento da energia.

Com relação aos modelos fenomenológicos

podemos destacar os seguintes trabalhos: de Friedlander & Weiner (1983), onde a dependência energética na inelasticidade é descrita com base no modelo hidrodinâmico de Landau; de Chou et al. (1985), onde o conceito de temperatura de partição é introduzido nos processos de colisões; de Fowler et al. (1985) e de Weiner et al. (1992), que derivam a distribuição de inelasticidade a partir da interação gluon-gluon; de Dias de Deus (1985), que faz uma correlação direta entre o espectro de partícula líder com a função de "overlap" inelástica no espaço do parâmetro de impacto e, finalmente, o trabalho de Golyak (1992), que busca uma conexão direta entre a inelasticidade média e a distribuição de multiplicidade média de partículas produzidas nos processos de colisões a altas energias. Basicamente ele procura calcular K a partir da hipótese sobre uma distribuição de K em relação a energia [$P_K(s)$] e de uma probabilidade $P_n(s, K)$ de observação de n partículas secundárias produzidas para todo valor de K . Sua proposta que a princípio parece bem interessante, chega a resultados ambíguos e que não levam a nenhum esclarecimento sobre a inelasticidade, muito menos de seu comportamento com relação à energia. Este trabalho foi a nossa principal motivação para investigar melhor a questão da inelasticidade.

A idéia de relacionar K a n não é nova. Em 1984 Fowler et al. (1984) fizeram alguns cálculos preliminares (não conclusivos) sobre ela. Até agora, a relação entre K e n , bem como o problema da dependência energética em K , continuam questões em aberto e atuais. O trabalho de Golyak (Golyak, 1992) mencionado anteriormente, também não proporcionou nenhum esclarecimento da dependência de K com a energia, pois qualquer modificação, que por ventura, façamos em suas hipóteses, sua forma de cálculo leva sempre ao mesmo valor de $K = 0.5$, ou seja, independente da energia.

Assim, neste trabalho estamos nos propondo, além de fazer um estudo crítico sobre o problema da dependência energética da inelasticidade nos últimas duas décadas, encontrar novos caminhos de analisar esta questão e até mesmo, se possível, derivar uma expressão analítica para K em função de s a partir de uma representação mais correta de n , levando-se em conta os resultados (experimentais e teóricos) mais recentes para esta

distribuição. Existe uma série de resultados importantes sobre multiplicidade, veja por exemplo, E735 COLLABORATION (1994), obtidos no COLLIDER do CERN e no TEVATRON do FERMILAB desde o início da década de noventa, inclusive com boas parametrizações, que não foram utilizados por Golyak (Golyak, 1992) e nem em outros artigos mais recentes.

Acreditamos que em nosso trabalho ser conveniente procurarmos pela conexão entre K e n utilizando-se distribuições no espaço do parâmetro de impacto, onde a física envolvida no problema se mostra bem mais transparente e fácil de ser compreendida.

Numa colisão hádron-hádron a altas energias onde ocorre a produção de multipartículas, três grandezas (ou variáveis) devem estar de alguma forma correlacionadas. São elas: o parâmetro de **impacto (b)**, a **inelasticidade (K)** e a **multiplicidade (n)** de partículas produzidas. Elas assumem valores nos seguintes intervalos de variação, $0 \leq b < \infty$, $0 \leq K \leq 1$ e $0 \leq n < \infty$, respectivamente.

O Quadro 1 exhibe um panorama geral destas variáveis, de suas funções correlatas, probabilidades e valores médios, para uma determinada reação hádron-hádron que ocorre numa energia V_s .

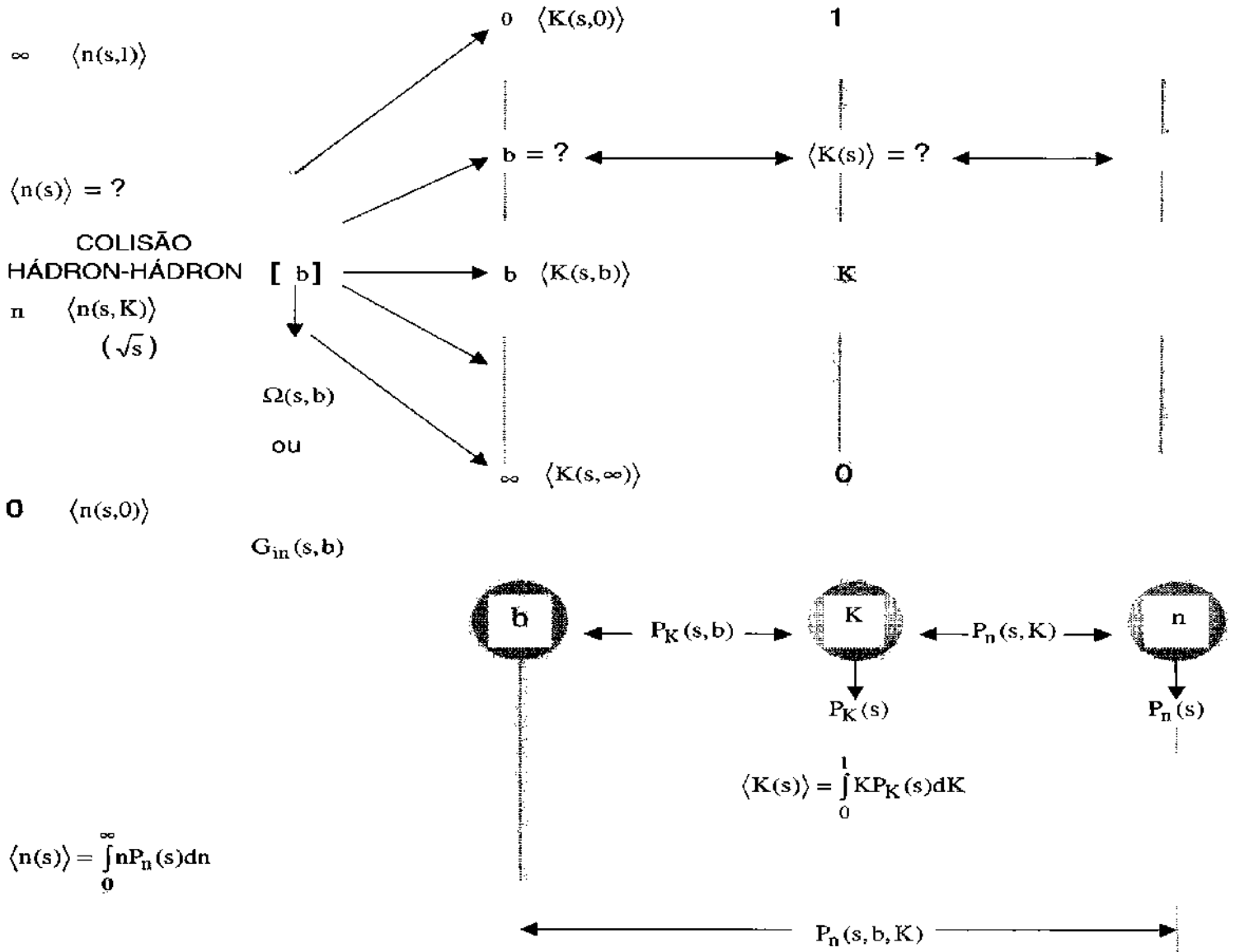
Para cada valor b do parâmetro de impacto podemos definir (entre outras) uma função eiconal $G(s, b)$ e uma função de "overlap" inelástica $G_{in}(s, b)$, ou ainda, uma probabilidade de distribuição em termos da eiconal, ou seja, $P[\Omega(s, b), \langle \Omega(s, b) \rangle]$.

Para a inelasticidade temos uma probabilidade de distribuição $P_K(s)$ [ou (s, K) , como aparece em alguns trabalhos], dependente da inelasticidade e da energia, que nos permite calcular o valor médio da inelasticidade em função da energia através da expressão 1.15. Esta pode ser rescrita em termos de $P_K(S)$ como

$$\langle K(s) \rangle = \int_0^1 K P_K(s) dK. \quad (4.3)$$

Quanto à multiplicidade, podemos dizer que ela é bem conhecida, tanto do ponto de vista experimental, bem como teórico. A probabilidade de distribuição de multiplicidade $P_n(s)$, é descrita com boa precisão, através de algumas parametrizações, entre elas, a tradicional e eficiente Distribuição Binomial Negativa (veja item 2.2),

Quadro 1 – Panorama geral das variáveis “b”, “K” e “n”.



Conhecendo-se a função podemos calcular o valor médio da distribuição de multiplicidade em função da energia por meio da integral

$$\langle n(s) \rangle = \int_0^{\infty} n P_n(s) dn \quad (4.4)$$

Apesar da existência de vários estudos sobre as grandezas e funções do Quadro 1, ainda não está claro, de um ponto de vista mais global, as relações e correlações entre elas.

Nesses trabalhos, aos quais nos referimos, estas questões foram abordadas de forma bastante fragmentada e sem o intuito de se procurar, ou

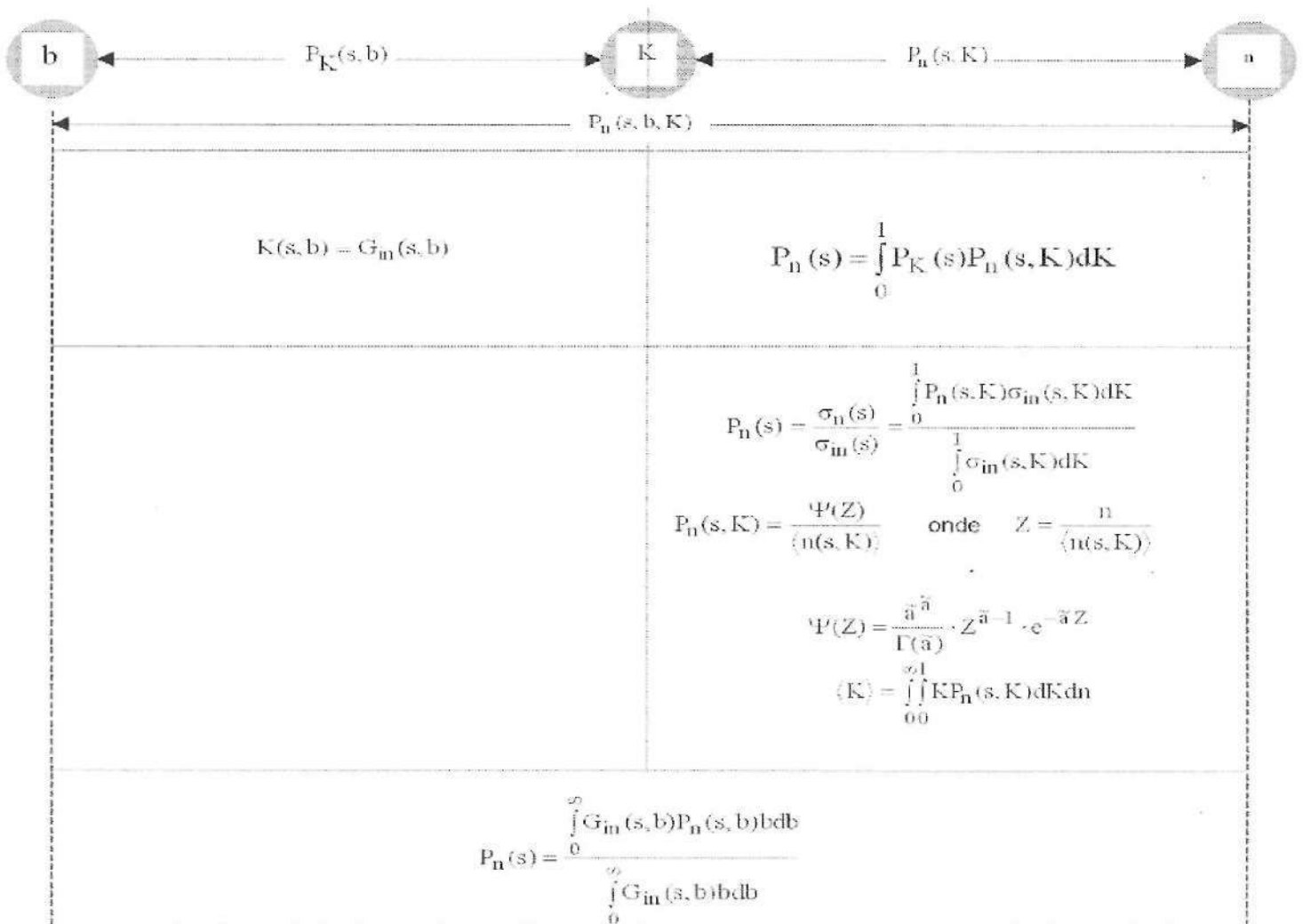
mesmo de se entender, como as variáveis b , K e n estão interligadas.

O Quadro 2 mostra um resumo das principais propostas existentes sobre este assunto. A seguir faremos uma breve discussão de cada uma delas.

a) Propostas que fazem uma relação entre n e K .

Um trabalho importante que faz uma ligação entre a inelasticidade e a multiplicidade foi feito por Fowler et al.(1984). Eles propõem que a probabilidade de distribuição de multipartículas seja calculada por meio da seguinte integral

Quadro 2 – Probabilidades e Valores Médios – “Propostas Existentes”.



$$P_n(s) = \int_0^1 P_K(s) P_n(s, K) dK, \quad (4.5)$$

onde $P_n(s, K)$ representa uma probabilidade condicional para se observar n partículas quando a inelasticidade é K .

Neste trabalho, eles não calculam $K(s)$, mas sim o momento transversal médio $P_T(n)$ em termos da multiplicidade n , utilizando-se a expressão

$$\langle p_T(n) \rangle = \frac{\int_0^1 \langle p_T(s) \rangle P_n(s, K) P_K(s) dK}{\int_0^1 P_n(s, K) P_K(s) dK}, \quad (4.6)$$

onde $P_T(s)$, com base no modelo hidrodinâmico, é expresso por

$$\langle p_T(s) \rangle = A(K\sqrt{s})^\alpha. \quad (4.7)$$

A função $P_n(s, K)$ utilizada na integral (4.6) é encontrada parametrizando-se dos dados experimentais de $P_n(s)$ a partir da expressão (4.5) com a probabilidade $P_K(s)$ representada, como já vimos, pela conhecida distribuição beta da Eq. 1.16. Nesta expressão, os parâmetros a e b possuem os seguintes valores: $a = b = 2.5$ na região de energias do ISR - CERN (como já mencionamos) e $a = 1.5$ e $b = 3$ para as energias do COLLIDER - CERN.

No entanto, ao nosso ver, a idéia mais interessante sobre um possível elo entre n e K ,

origina-se do trabalho de Golyak (1992). Ele propõe uma investigação de uma conexão direta entre a inelasticidade e a distribuição de multiplicidade, esta invariante sob o scaling KNO.

A probabilidade de distribuição de multiplicidade $P_n(s)$, definida pela fórmula padrão

$$P_n(s) = \frac{\sigma_n(s)}{\sigma_{in}(s)} = \frac{\int_0^1 P_n(s, K) \sigma_{in}(s, K) dK}{\int_0^1 \sigma_{in}(s, K) dK} \quad (4.8)$$

onde, $P_n(s, K)$ é a probabilidade de se observar n partículas secundárias produzidas para todo valor de K .

Suas hipóteses básicas são:

$$\sigma_{in}(s, K) = \sigma(s) K^l \quad (4.9)$$

e

$$P_n(s, K) = \frac{\Psi(Z)}{\langle n(s, K) \rangle} \quad (4.10)$$

onde

$$\Psi(Z) = \frac{\tilde{a}^{\tilde{a}}}{\Gamma(\tilde{a})} \cdot Z^{\tilde{a}-1} \cdot e^{-\tilde{a}Z} \quad (4.11)$$

$$Z = \frac{n}{\langle n(s, K) \rangle} \quad (4.12)$$

e

$$\langle n(s, K) \rangle = N(s) K^m \quad (4.13)$$

$\Psi(Z)$ é invariante sob scaling KNO.

Podemos ver que para $K=0$, $\sigma_{in}(s, K) = \langle n(s, K) \rangle = 0$ e para $K=1$ tem-se, $\sigma_{in}(s, K) = \sigma(s)$ e $\langle n(s, K) \rangle = N(s)$. Os parâmetros $\sigma(s)$ e $N(s)$ entram nos cálculos intermediários, mas desaparecem no resultado final.

Integrando-se a expressão (4.8) com os ingredientes (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13), e impondo-se que o resultado seja a distribuição binomial negativa, como é de se esperar na região de energias do ISR - CERN, obtém-se

$$P_n(s) = \frac{a^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{\langle n(s) \rangle} \cdot Z^{a-1} \cdot e^{-aZ} \quad (4.14)$$

onde

$$Z = \frac{n}{\langle n(s) \rangle} \quad (4.15)$$

e

$$\tilde{a} = a - 1 \text{ com } a = \frac{l+1}{m} \quad (4.16)$$

O valor de $\langle n(s) \rangle$, em termos de \tilde{a} e $N(s)$, é calculado da seguinte forma

$$\langle n(s) \rangle = \frac{\int_0^\infty n P_n(s) dn}{\int_0^\infty P_n(s) dn} = \frac{\tilde{a}-1}{\tilde{a}} \cdot N(s) \quad (4.17)$$

Finalmente, a inelasticidade média é calculada por

$$\langle K \rangle = \int_0^1 \int_0^\infty K P_n(s, K) dK dn \quad (4.18)$$

Substituindo-se a expressão (4.10) para $P_n(s, K)$, juntamente com as relações encontradas para \tilde{a} , Z e $\langle n(s, K) \rangle$, Golyak mostra que

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.19)$$

como era esperado para a região do ISR - CERN.

b) *Propostas que fazem uma relação entre b e K ,*

Este assunto foi tratado no item 3.3, no entanto, vamos aqui tecer mais alguns comentários.

A tentativa mais conhecida para estabelecer este tipo de conexão foi feita por Dias de Deus (1985).

Sua idéia básica é bem simples, ou seja: Se o "overlap" entre os hádrons colidentes é grande, $b \sim 0$, implica que a energia disponível para produção de partículas é grande. Se por outro lado, a colisão é apenas periférica a energia deixada para produção de partículas é bem pequena.

Assim, ele propôs um ansatz da maneira mais direta possível, dado pela expressão 3.29. Pode-se notar, como já dissemos anteriormente, que ambas grandezas tem um mesmo intervalo de variação, e assumem valores entre 0 e 1.

Com esta proposta, o aumento observado em $\sigma_{el} / \sigma_{tot}$ com relação à energia, faz com que a inelasticidade média cresça com respeito a mesma variável.

c) *Propostas que fazem uma relação entre b e n.*

Neste caso podemos citar o trabalho de Barshay & Eich (1986) como uma das tentativas de relacionar o parâmetro de impacto com o número de partículas produzidas numa reação.

Eles fazem uma conexão direta de b com n, sem passar pelo K, com o objetivo de calcular n(s).

A probabilidade de distribuição de multiplicidade é definida em termos de uma probabilidade de distribuição no espaço do parâmetro de impacto, $P_n(s, b)$ e de $G_{in}(s, b)$ como uma função peso, por meio da seguinte integral

$$P_n(s) = \frac{\int_0^{\infty} G_{in}(s, b) P_n(s, b) b db}{\int_0^{\infty} G_{in}(s, b) b db} \quad (4.20)$$

A função de "overlap" inelástica é escrita em termos da eiconal pela equação (3.28) e a função $P_n(s, b)$ é representada pela distribuição binomial negativa em condições assintóticas da seguinte maneira

$$P_n(s, b) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{\langle n(b, s) \rangle} \left(\frac{n}{\langle n(s, b) \rangle} \right)^{k-1} \cdot e^{-k \frac{n}{\langle n(s, b) \rangle}} \quad (4.21)$$

onde, $\langle n(s, b) \rangle$ é considerada na sua forma mais simples, ou seja, igual a

$$\langle n(s, b) \rangle \propto e^{-\lambda b^2} \quad (4.22)$$

Nenhuma das propostas apresentadas, resolveu satisfatoriamente as questões sobre $K(s)$, pois ainda permaneceram dúvidas sobre as diversas probabilidades de distribuições e, o que é mais importante, nenhuma delas abordou a possibilidade de se encontrar uma correlação mais global, ou seja, uma função probabilidade de distribuição do tipo $P_n(s, b, K)$.

Este é um ponto que estamos muito interessados

em resolver, ou pelo menos, em encontrar e/ou indicar um caminho de fazê-lo.

O Quadro 3 traz uma visão geral de nossas tentativas de encaminhar soluções para estas questões. No próximo item faremos uma discussão mais detalhada sobre elas.

Gostaríamos de dizer que, em face à situação caótica das idéias existentes, à diversidade de resultados obtidos e também, à algumas propostas que formulamos, as ilustrações na forma dos Quadros 1, 2 e 3, foram o caminho que encontramos e concebemos para que se possa ter numa vista de olhos, um panorama global, claro e objetivo sobre todas estas questões.

4.2 Propostas Alternativas de Investigação

Até este ponto do trabalho procuramos analisar de uma forma mais abrangente a questão da inelasticidade nas colisões hadrônicas a altas energias e de suas correlações com a energia, parâmetro de impacto e distribuição de multiplicidade. Os principais pontos que conseguimos explorar, numa visão absolutamente particular, estão apresentados resumidamente nos Quadros 1 e 2.

Além do empreendimento de análise crítica da problemática envolvida, nos foi possível também, propor e desenvolver algumas idéias alternativas de abordar o problema. O Quadro 3 mostra um resumo do que foi proposto e a seguir apresentaremos, em breves discussões, alguns dos resultados obtidos.

Uma primeira proposta foi seguir o procedimento de Golyak (1992), mas alterando suas hipóteses iniciais (das quais tínhamos sérias dúvidas) para $S_{in}(S, K)$ e $\langle n(s, K) \rangle$, expressões (4.9) e (4.10) respectivamente, para

$$\sigma_{in}(s, K) = \sigma_{in}(s) \cdot \frac{K}{\langle K(s) \rangle} \quad (4.23)$$

e

$$\langle n(s, K) \rangle = \langle n(s) \rangle \cdot \frac{K}{K(s)} \quad (4.24)$$

Com estas novas hipóteses podemos ver que as grandezas $\sigma_{in}(s, K)$ e $\langle n(s, K) \rangle$ se reduzem simplesmente à seção de choque inelástica total $\sigma_{in}(s)$ e à multiplicidade média $\langle n(s) \rangle$, ambos resultados finais de uma colisão, justamente quando a inelasticidade assume seu valor de maior

probabilidade, ou seja, seu valor médio ($K(s)$). Isto, a princípio, nos parece bem razoável.

Repetindo-se a sistemática de cálculo apresentada no item 4.1, reencontramos o valor obtido por Golyak (1992) para a inelasticidade média, ou seja, o tradicional 0.5. O cálculo da multiplicidade média levou-nos, no entanto, a uma função hipergeométrica de difícil interpretação.

Uma outra idéia, foi propor uma alternativa à distribuição beta eq. 4.8 para representar a probabilidade de distribuição da inelasticidade $P_K(s)$ e ao mesmo tempo propiciar um elo de ligação com o parâmetro de impacto, diferente da proposta de Dias de Deus (1985). Esta foi formulada da seguinte maneira: podemos calcular a probabilidade acima através da integral

$$P_K(s) = \frac{\int_0^{\infty} P_K(s, b) G_{in}(s, b) b db}{\int_0^{\infty} G_{in}(b, s) b db} \quad (4.25)$$

utilizando-se como ansatz empíricos as expressões

$$P_K(s, b) = \alpha e^{-\beta [K - \langle K(s) \rangle]^2 b^2} \quad (4.26)$$

e

$$G_{in}(s, b) = G_0(s) e^{-\mu b^2}. \quad (4.27)$$

Vê-se claramente que a expressão (4.26) gera maiores probabilidades para valores de K em torno de $\langle K(s) \rangle$ e na região central, em $b \sim 0$.

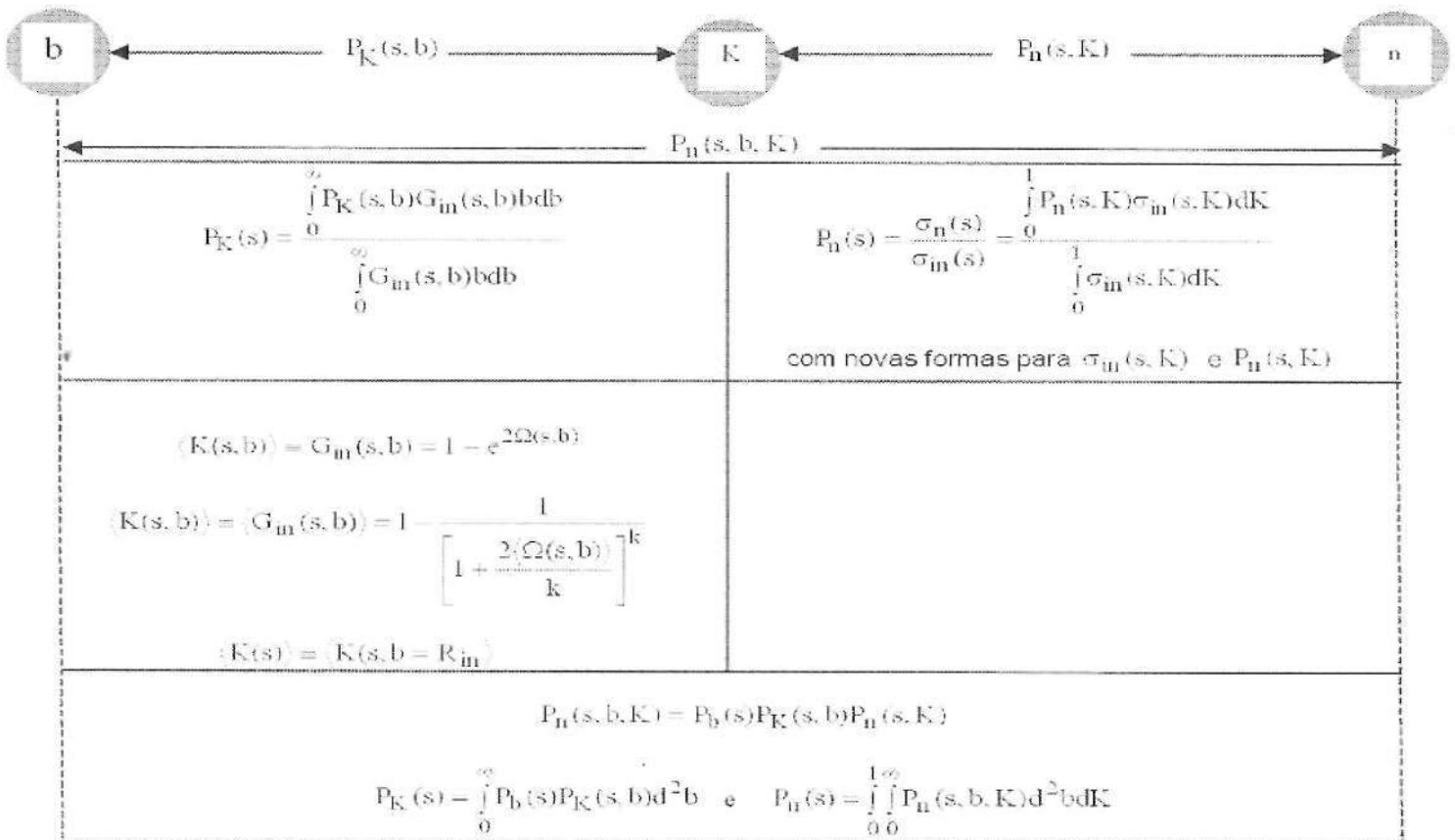
Substituindo-se (4.26) e (4.27) em (4.25) obtemos

$$P_K(s) = \frac{\alpha \mu}{\beta [K - \langle K(s) \rangle]^2 + \mu} \quad (4.28)$$

Esta expressão parece bastante razoável, pois apresenta um máximo em $K = \langle K(s) \rangle$ e, de certa forma, podemos ver também, que a largura desta distribuição está de algum modo, vinculada à largura de $G_{in}(s, b)$ através do parâmetro m dependente da energia.

O cálculo da inelasticidade média através da expressão 4.28, novamente nos levou ao valor 0.5.

Quadro 3 – Probabilidades e Valores Médios – “Nossas Propostas”.



A esta altura nos sentimos diante de um impasse. As duas tentativas que fizemos, uma relacionando K e n nos moldes de Golyak (1992) e outra ligando K e b por meio das expressões (4.25), (4.26) e (4.27), levaram sistematicamente ao valor da inelasticidade média igual a 0.5.

Nossa experiência de utilização do formalismo do parâmetro de impacto para estudar as colisões hadrônicas a altas energias, nos fez olhar com mais cuidado a situação e tentar uma outra maneira de fazer conexão entre K e n , objetivando o cálculo da inelasticidade média. Basicamente, pensamos relacionar a inelasticidade com a função de "overlap" inelástica, mas não da forma direta como o fez Dias de Deus (1985) através da expressão (3.26).

Acreditamos que para cada valor do parâmetro de impacto b , corresponda não um valor único de inelasticidade $K(s, b)$, mas todos valores possíveis de K entre 0 e 1 (veja Quadro 1). Assim, deve haver para cada b um valor médio de inelasticidade, ou seja, $\langle K(s, b) \rangle$. Nossa primeira hipótese foi de que, é esta a grandeza que deve ser identificada diretamente com a função de "overlap" inelástica. Fizemos isto de duas maneiras:

(i) Escrevendo em termos da eiconal, como na expressão (3.28). Assim:

$$\langle K(s, b) \rangle \equiv G_{in}(s, b) = 1 - e^{2\Omega(s, b)} \quad (4.29)$$

e

(ii) Utilizando uma função de "overlap" inelástica média, com base no modelo de Barshay & Goldberg (1987) para as flutuações na eiconal, dada pela relação (3.37). Desta forma, teremos

$$\langle K(s, b) \rangle \equiv \langle G_{in}(s, b) \rangle = 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{2\langle \Omega(s, b) \rangle}{k} \right]^k} \quad (4.30)$$

A segunda hipótese, foi assumir que:

$$\langle K(s) \rangle \equiv \langle K(s, b = R_{in}) \rangle, \quad (4.31)$$

onde R_{in} é o raio efetivo de interação inelástica. Este raio é definido como sendo a raiz quadrada do raio quadrático médio de interação inelástica (r_{in}^2). Esta grandeza é calculada através da

seguinte expressão:

$$\langle r_{in}^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty b^2 G_{in}(s, b) b db}{\int_0^\infty G_{in}(s, b) b db} \quad (4.32)$$

Com estas hipóteses, significa que estamos interpretando a colisão da seguinte maneira: quando dois hádrons colidem a uma determinada energia no centro de massa, existe a probabilidade de gastar qualquer parte desta energia em processos inelásticos, desde de zero até seu valor integral, mas com um valor mais provável onde a constante de proporcionalidade é exatamente a inelasticidade média. O que estamos fazendo, é relacionar esta inelasticidade média diretamente com a região longitudinal mais provável para que ocorra reações inelásticas, ou seja, com a seção de choque total inelástica.

Utilizando-se de resultados bastante cuidadosos (Pádua, 1989) sobre eiconal, função de "overlap" inelástica, feito de forma independente de modelo teórico e a partir dos dados experimentais de ds/dt , para as reações pp na região do ISR-CERN e, pp na região de energias com \sqrt{s} entre 10 e 546 GeV, calculamos $\langle K(s) \rangle$ para estas duas reações e para várias energias. A seguir mostramos os resultados encontrados:

<i>Reação - pp</i>			
\sqrt{s} (GeV)	R_{in} (fm)	$\langle K(s) \rangle$ (Eq. 4.29)	$\langle K(s) \rangle$ (Eq. 4.30)
9.78	1.046	0.39	0.39
13.76	1.024	0.39	0.39
19.42	1.025	0.39	0.39
53	1.099	0.38	0.35
546	1.240	0.39	0.38

<i>Reação - pp</i>			
\sqrt{s} (GeV)	R_{in} (fm)	$\langle K(s) \rangle$ (Eq. 4.29)	$\langle K(s) \rangle$ (Eq. 4.30)
19.42	0.983	0.38	0.38
53	1.087	0.36	0.35

Finalmente, de um ponto de vista mais amplo, o vínculo entre b , K e n , como já dissemos, ainda não foi proposto em nenhum trabalho. Nossa sugestão para isto, seria escrever uma probabilidade de multiplicidade total, como um produto de probabilidades condicionadas da seguinte forma

$$P_n(s, b, K) = P_b(s)P_K(s, b)P_n(s, K) \quad (4.33)$$

onde, numa primeira tentativa poderíamos iniciar com as expressões 4.27, 4.26 e 4.10 para estas respectivas probabilidades.

Os valores de médios da inelasticidade e da multiplicidade devem ser calculados respectivamente, através das probabilidades

$$P_K(s) = \int_0^{\infty} P_b(s)P_K(s, b)d^2b \quad (4.34)$$

e

$$P_n(s) = \int_0^1 \int_0^{\infty} P_n(s, b, K)d^2b dK \quad (4.35)$$

Estes cálculos deverão ser realizados num próximo trabalho.

4.3 Observações Finais e Conclusões

- 1) Em seu trabalho, Golyak (1992) propõe uma relação ou conexão entre as distribuições de K e n apenas para mostrar que isto é possível e que, na região de energias do ISR - CERN, o seu método leva ao valor esperado para inelasticidade média igual a 0.5. Ele não faz uma correlação geral, como havíamos pensado de início, com o intuito de deduzir uma expressão analítica para o comportamento da inelasticidade média em função da energia.
- 2) Em vista do resultado encontrado por nós no item anterior, o procedimento de Golyak (1992), da forma em que ele definiu a probabilidade $P_n(s, K)$, independentemente das hipóteses para $\sigma_{in}(s, K)$ e $\langle n(s, K) \rangle$, gera sempre o mesmo valor de inelasticidade média. Assim, seu trabalho além se caracterizar como inoperante para o cálculo desta grandeza, não permite também um estudo de seu comportamento com relação à energia.
- 3) A conexão entre a multiplicidade e a inelasticidade feita por Fowler (1984) não nos parece conclusivas para o tema que estamos abordando e que temos interesse, pois além de não obter uma expressão analítica para $P_n(s, K)$, utiliza para seus cálculos a distribuição beta para a probabilidade $P_K(s)$.

Como bem sabemos, esta é apenas uma expressão empírica e que não contém explicitamente a dependência com a energia.

- 4) Os dados experimentais da colisão pp e pp depõem contra a hipótese de Dias de Deus (1985), de relacionar $K(s, b)$ diretamente com $G_{in}(s, b)$. Esta proposta gera um crescimento da inelasticidade com relação ao aumento da energia e isto, é incompatível com o comportamento desses dados.
 - 5) A proposta de Barshay & Goldberg (1987), ligando o parâmetro de impacto e a multiplicidade, leva a resultados interessantes sobre a multiplicidade média, mas não contribui em nada para a análise da inelasticidade média. Acreditamos que o caminho entre e deve ser tratado passando de algum modo pela inelasticidade K e, que isto, deve ser representado por uma distribuição mais geral do tipo $P_n(s, b, K)$ do quadro 3.
 - 6) Os resultados que encontramos através das hipóteses representadas pelas expressões 4.29, 4.30 e 4.31 e a partir de dados de eiconal, função de "overlap" inelástica e raio efetivo de interação, obtidos cuidadosamente por Pádua (1989), revelam que a inelasticidade média se mantém constante, com um valor em torno de 0.4, na transição da região de energias do ISR para o COLLIDER. Tanto este comportamento, bem como o próprio valor de 0.4, estão em pleno acordo com os resultados (e também, com as justificativas físicas dadas) que obtivemos num outro trabalho (Dias de Deus & Pádua, 1993), onde a inelasticidade média foi calculada de forma totalmente diferente, ou seja, a partir dos dados experimentais de reações inelásticas inclusivas.
- Nossa observação final, é de que, com o trabalho de pesquisa que resultou neste artigo, conseguimos ter uma compreensão mais profunda sobre a questão da inelasticidade e dos problemas que a cercam e, o que é mais importante, propor alguns caminhos alternativos viáveis que com certeza possibilitarão resolvê-la satisfatoriamente e quem sabe, amenizar um pouco a polêmica que existe em torno da mesma. Polêmica esta, que ao nosso ver, pode estar se diluindo em favor de um comportamento constante da inelasticidade média com relação ao crescimento da energia.

PÁDUA, A. B. de; PÁDUA, C. G. de; DIAS DE DEUS, J. Analysis of the inelasticity in the multiparticle production processes in Hadronic Collision at High Energy levels. *Semina: Ci. Exatas/Tecnol.*, Londrina, v. 18/20, n. 4, p. 3-23, dez. 1997/1999.

ABSTRACT: This present work deals with a broad and critical phenomenological analysis about the inelasticity in the hadronic collisions at high energy levels. A discussion is presented with the purpose of correlating the inelasticity distributions with the multiplicity distribution as well as the characteristic functions of the impact parameter space. The energy dependence of the mean inelasticity is analysed, based on the inclusive reactions of a particle and on the correlations with the probability of multiparticles distribution as well as with the inelastic overlapping function. In all attempts the results showed that the mean inelasticity remains constant in the GeV energy region. Finally, a way to examine the possibility of finding a broader connection among the inelasticity, the multiplicity and the impact parameter, is suggested.

KEY WORDS: Hadronic Collision, High Energy levels; Inclusive Reaction, Leading Particle; Inelasticity; Mean Inelasticity; Multiplicity; Impact Parameter; Energy Dependence; Eikonal; Fluctuations in the Eikonal; Inelastic Overlapping Function; Effective Interaction Radius.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALNER, G. J. et al., UA5 COLLABORATION. Scaling Violation Favours High Multiplicity Events at 540 GeV CMS Energy. *Phys. Lett. B*, v. 138, n. 4, p. 304-310, april 1984.
- ALNER, G. L. et al., UA5 COLLABORATION. Scaling of Pseudorapidity Distributions at c. m. Energies up to 0.9 TeV. *Z. Phys. C: Particles and Fields*, v. 33, p. 1-6, 1986.
- BARSHAY, S.; EICH, E. New Phenomena in Multihadron Production in the TeV Energy Range: An Interpretation of Large, Broad Effective Clusters in Multiplicity Distributions. *Phys. Lett. B*, v. 178, n. 4, p. 431-434, october 1986.
- BARSHAY, S.; GOLDBERG, J. A New Description of High Energy Antiproton(Proton)-Proton Elastic Scattering. *Phys. Lett. B*, v. 196, n. 4, p. 566-570, october 1987.
- BASILE, M. et al. Experimental Proof that the Leading Protons are not Correlated. *Il Nuovo Cimento A*, v. 73, n. 4, p. 329-334, febbraio 1983.
- BELLANDI F^o, J. et al. Nuclear Interactions in Super High Energy Region. *Prog. Theor. Phys.*, v. 83, n.1, p. 58-76, january 1990.
- BELLANDI F^o, J. et al. Partial and Total Inelasticities Obtained from Inclusive Reaction Data. Campinas: IFGW / UNICAMP, 1993. preprint
- BRICK, D. et al. The Effective - Energy Dependence of the Charged Particle's Multiplicity in Interactions on Protons at 147 GeV/c. *Phys. Lett. B*, v. 103, n. 3, p. 241-246, july 1981.
- CHOU, T. T.; YANG, C. N.; YEN, E. Single-Particle Momentum Distribution at High Energies and Concept of Partition Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, v. 54, n. 6, p. 510-513, february 1985.
- DIAS DE DEUS, J. Leading-Particle Spectrum and Impact-Parameter Distributions at Very High Energies. *Phys. Rev. D*, v. 32, n. 9, p. 2334-2336, november 1985.
- DIAS DE DEUS, J.; PÁDUA, A. B. de. On the Energy Dependence of Inelasticity. *Phys. Lett. B*, v. 315, p. 188-194, 1993.
- E735 COLLABORATION, FERMILAB. Multiplicity Dependence of Transverse Momentum Spectra of Centrally Produced Hadrons in Collisions at 0.3, 0.54, 0.9 and 1.8 TeV Center of Mass Energy. *Phys. Lett. B*, v. 336, n. 3-4, p. 599-600, 1994.
- FOWLER, G. N.; FRIEDLÄNDER, E. M.; PLÜMER, M.; WEINER, R. M. Inelasticity Distribution and its Implications for Many Particles Production Processes. *Phys. Lett. B*, v. 145, n. 5-6, p. 407-410, september 1984.
- FOWLER, G. N.; VOURDAS, A.; G. N.; WEINER, R. M. Inelasticity and Leading-Particle Effect: Momentum and Mass Distribution of the Central Fireball in High-Energy Hadronic Interactions. *Phys. Rev. D*, v. 35, n. 3, p. 870-874, february 1987.
- FOWLER, G. N.; WEINER, R. M.; WILK, G. Derivation of inelasticity Distribution for Hadron-Hadron Collisions in a Gluon-Gluon Interaction Picture. *Phys. Rev. Lett.*, v.55, n. 2, p. 173-176, july 1985.
- FRIEDLANDER, E. M.; WEINER, R. M. Particle Multiplicities at the Collider and the Hydrodynamical Model. *Phys. Rev. D*, v. 28, n. 11, p. 2903-2904, december 1983.
- GAISSER, T. K.; STANEV, T. Mini-Jets in Minimum-Bias Events. *Phys. Lett. B*, v. 219, n. 2-3, p. 375-380, march 1989.
- GOLYAK, I. A Connection of Inelasticity with Multiplicity

- Distribution at High Energies. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 7, n. 26, p. 2401-2406, 1992.
- KOBA, Z.; NIELSEN, H. B.; OLESEN, P. Scaling of Multiplicity Distributions in High Energy Hadron Collisions. *Nucl. Phys. B*, v. 40, p. 317-334, 1972.
- KOPELJOVICH, B. Z.; NIKOLAEV, N. N.; POTASHNIKOVA, I. K. Rising Cross Sections in QCD and the Cosmic-Ray Data. *Phys. Rev. D*, v. 39, n. 3, p. 769-779, february 1989.
- LINKAI, D.; QINGQI, Z. Energy Dependence of Inelasticity. *Phys. Lett. B*, v. 297, p. 201-204, 1992.
- PÁDUA, A. B. de. Análise Fenomenológica no Canal-s dos Espalhamento Elástico a Altas Energias. Campinas, 1989. Tese (Doutorado) – IFGW, UNICAMP.
- WDOWCZYK, J.; WOLFENDALE, A. W. Properties of Hadron Interactions at Extremely High Energies. *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, v. 10, p. 257-272, 1984.
- WEINER, R. M.; WILK, G.; WLODARCZYK, Z. Limited Growth of the Number of Sources and Decrease of Inelasticity in High-Energy Reactions. *Phys. Rev. D*, v. 45, n. 7, p. 2308-2311, april 1992.
- WILK, G.; WLODARCZYK, Z. The Number of Participants and the Inelasticity from the Eikonal Formalism of Hadronic Interactions. Warsaw, Poland: Soltan Institute for Nuclear Studies, 1992. Preprint.