

INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE REPOSIÇÃO DE VELOCIDADE NO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM PÊNDBULO INVERTIDO PERTURBADO PERIODICAMENTE E COM RESTRIÇÕES NA TRAJETÓRIA

REINALDO GONÇALVES NOGUEIRA¹
MARCONI KOLM MADRID²
ÁLVARO GERALDO BADAN PALHARES³

NOGUEIRA, R. G.; MADRID M. K ; PALHARES, A. G. B. Influência do coeficiente de reposição de velocidade no comportamento dinâmico de um pêndulo invertido perturbado periodicamente e com restrições na trajetória. *Semina: Ci. Exatas/Tecnol.* Londrina, v. 21, n. 4, p. 53-57, dez. 2000.

RESUMO: Neste trabalho são apresentados resultados obtidos na simulação do comportamento dinâmico de um pêndulo invertido perturbado periodicamente cujo movimento é restrito devido à existência de obstáculos em sua trajetória, gerando uma descontinuidade. A intenção é mostrar a mudança do comportamento em função da variação do coeficiente de reposição de velocidade após cada choque do pêndulo com os obstáculos, cujo valor depende diretamente dos materiais que compõem os elementos envolvidos na colisão. As simulações foram realizadas utilizando-se o Simulink/Matlab, e as análises baseadas em mapas obtidos através de transformações de Poincaré e diagramas de bifurcação, ferramentas que podem mostrar o comportamento dinâmico do sistema.

PALAVRAS-CHAVE: pêndulo invertido; comportamento dinâmico; transformações de Poncaré; diagramas de bifurcação.

1 INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido é, sem dúvida alguma, um exemplo clássico de sistema o qual é, ainda hoje, bastante usado no estudo de comportamento dinâmico. Neste trabalho procura-se estudar este comportamento em um pêndulo invertido com perturbação periódica e com movimentos restritos pela presença de obstáculos em sua trajetória, conforme mostra a Figura 1.

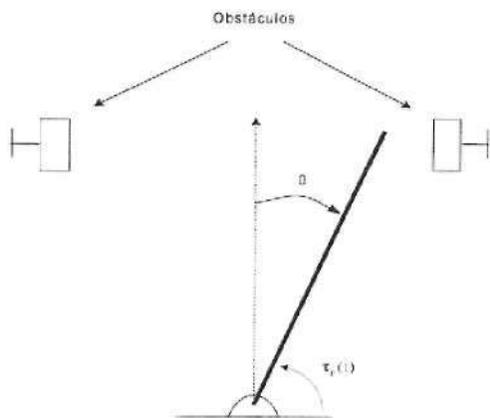


Figura 1 – Pêndulo invertido com obstáculos.

A referência motivadora deste trabalho é o artigo de Shaw & Rand (1989), onde é feita a análise de um modelo aproximado representativo do sistema e considerando-se um choque completamente elástico do pêndulo com os obstáculos, ou seja, um coeficiente de reposição de velocidade (k_r) unitário.

Neste artigo reformula-se o modelo usado em Shaw & Rand (1989) e em Moore & Shaw (1990), utilizando-se o modelo não linear original e considerando-se o elo como uma barra delgada com massa uniformemente distribuída, e faz-se a análise do comportamento dinâmico do sistema em função da variação do coeficiente de reposição de velocidade k_r após cada choque.

Este modelo foi simulado no ambiente Simulink do Matlab, após ter sido transformado matematicamente em um modelo autônomo descrito em um espaço cilíndrico de dimensão três, sujeito a conter regiões no espaço de parâmetros que o torna extremamente sensível as condições iniciais, e que podem caracterizar comportamentos caóticos (Guckenheimer & Holmes, 1993) ou propiciar a formação de atratores estranhos (Mees & Sparrow, 1987; Hockett & Holmes, 1987).

¹ Doutorando em Engenharia Elétrica na Universidade Estadual de Campinas e docente do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina - e-mail: <rgnogueira@uel.br>

^{2,3} Doutor em Engenharia Elétrica e docente no Departamento de Sistemas e Controle de Energia da Universidade Estadual de Campinas.

O trabalho foi estruturado de tal forma que a Seção 2 destina-se a apresentação e reformulação do modelo apresentado em Shaw & Rand (1989), a Seção 3 mostra em síntese os procedimentos usados para obter as transformações de Poincaré e os diagramas de bifurcação, a Seção 4 mostra os resultados das simulações realizadas e a Seção 5 mostra as conclusões obtidas em função dos resultados apresentados.

2 MODELAGEM DO SISTEMA NÃO LINEAR

O modelo matemático de um pêndulo com movimento planar, baseado numa barra rígida delgada, com massa uniformemente distribuída, perturbado e sem obstáculos na sua trajetória é:

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha\dot{\theta}(t) - k_p \sin(\theta(t)) = \tau_p(t) \quad (1)$$

onde α é uma constante relacionada com atrito viscoso (com o ar ou outro meio) e k_g é uma constante relacionada com o efeito gravitacional sobre a barra.

Suponha, como exemplo, que existam dois obstáculos localizados nos pontos $q = q_{F+}$ e $q = q_{F-}$. (ver Figura 1), e que t_c^- é o instante imediatamente anterior a ocorrência do choque com algum destes obstáculos e t_c^+ é o instante imediatamente posterior ao choque com qualquer um dos obstáculos. Foram arbitrados os valores $q_{F+} = 1,0$ [rad] e $C = -1,0$ [rad] por serem os mesmos adotados em Shaw & Rand (1989), embora se possa considerar em alguma situação $|q_{F+}| = |q_{F-}|$. Logo, para efeito da simulação, tem-se a seguinte condição de contorno:

$$\dot{\theta}(t_c^+) = -k_r \dot{\theta}(t_c^-) \quad (2)$$

onde $k_r \in [0,1]$ é o coeficiente de reposição do movimento após o choque com o obstáculo.

Escolhendo a função de perturbação como uma função cossenoidal $t_p(t) = b \cos(\omega t)$ e definindo um vetor de estados ampliado num espaço cilíndrico de dimensão três, como mostrado na equação (3):

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \omega t \text{ mod } 2\pi \end{bmatrix} \quad (3)$$

teremos a representação de estados do sistema autônomo equivalente ao descrito pela equação (1), representada no espaço cilíndrico de dimensão três $\mathbb{R}^3 \times S^1$:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ k_p \sin(x_1) - 2\alpha x_2 + \beta \cos(x_1) \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4)$$

com a condição de contorno $x_2(\tau_c^+) = -k_r x_2(\tau_c^-)$, imposta pelos obstáculos.

3 MAPAS DE POINCARÉ E DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO

Para a análise do sistema perturbado, este trabalho baseia-se nas características observadas no mapeamento de Poincaré, as quais são distintas para cada tipo de comportamento dinâmico, a saber, (Guckenheimer & Holmes, 1983):

- Comportamento periódico: possui um número finito de pontos;
- Comportamento quasi-periódico: tem a forma de uma curva fechada;
- Comportamento caótico: para o caso de sistemas dissipativos, o atrator tem estrutura fractal. No caso apresentado, o respectivo atrator possui estrutura fina e delgada, que se assemelha as ferraduras de Smale, ou conjuntos de Cantor (Thompson & Stewart, 1989; Moon, 1987; Seydel, 1994; Thompson & Bishop, 1994; Parker & Chua, 1989).

Tradicionalmente considera-se que um sistema dinâmico não linear de dimensão dois, sujeito a uma perturbação periódica e descrito pela equação:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n \times S^1 \quad (5)$$

tem uma transformação de Poincaré descrita num hiperplano Σ n ortogonal à variável de estado adicional $x_{n+1} = \omega t \text{ mod } 2\pi$, como mostra a Figura 2,

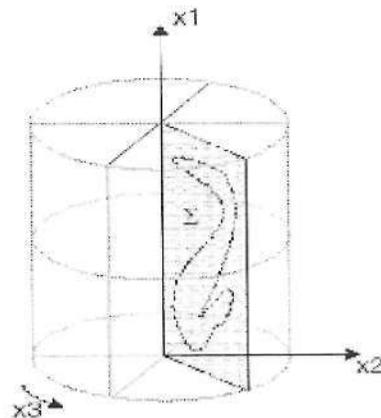


Figura 2 – Plano para definir a transformação de Poincaré.

Entretanto, o hiperplano que deve ter dimensão n , pode ser escolhido arbitrariamente dentro do espaço ampliado definido na equação (5). Neste trabalho $n = 2$, então se arbitra o hiperplano como sendo o plano definido pela equação (6), o qual pode ser visto na Figura 3.

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / x_1 = x_{10} = \text{constante}\} \quad (6)$$

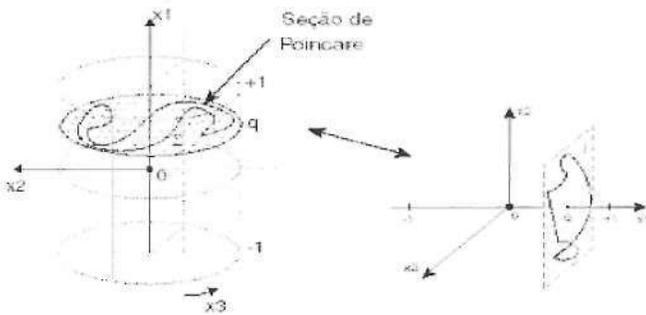


Figura 3 – Plano de Poincaré definido para $x_1 = q$ constante.

Supondo que a solução de (3) seja $x(t, x_0, t_0)$, a transformação de Poincaré $P(x_{10})$ é obtida através de uma discretização geométrica da trajetória definida por (6), quando esta trajetória intercepta o plano. O respectivo mapeamento é obtido pela sequência de interseções de com após um tempo suficientemente grande para garantir que o conjunto limite tenha sido atingido.

O diagrama de bifurcação é montado a partir das transformações de Poincaré, variando-se um parâmetro m cuja influência deseja-se representar, mantendo-se os demais invariantes. Neste trabalho, o parâmetro escolhido é $m = k_r$. Portanto, este diagrama é composto pela justaposição dos mapas de Poincaré construídos para cada valor do parâmetro variante. Trata-se de uma construção demorada, uma vez que a cada variação deste parâmetro deve-se esperar um tempo suficiente para que o sistema retorne ao conjunto limite depois de decorrido o transitório provocado pelo incremento do parâmetro m , evitando-se desta forma, chegar-se a conclusões errôneas devido a estes efeitos transitórios que podem mascarar as propriedades de cada mapa.

4 SIMULAÇÕES

Todos os resultados das simulações apresentados a seguir foram obtidos usando-se as mesmas condições iniciais ($x_1(0) = 0,8$; $x_2(0) = 0,5$; $x_3(0) = -p$ e $k_g = 1,0$, levando-se em consideração a variação do parâmetro k_r entre 1,0 e 0,85. O estudo da variação deste parâmetro é equivalente

a estudar o efeito do comportamento do sistema face a diferentes materiais que possam ser usados na construção dos elementos participantes do choque: pêndulo e obstáculo.

As Figuras 4 e 5 mostram os mapas de Poincaré obtidos para uma amplitude do sinal de perturbação $b = 2,0$ e valores de k_r de 1,0 e 0,85, respectivamente.

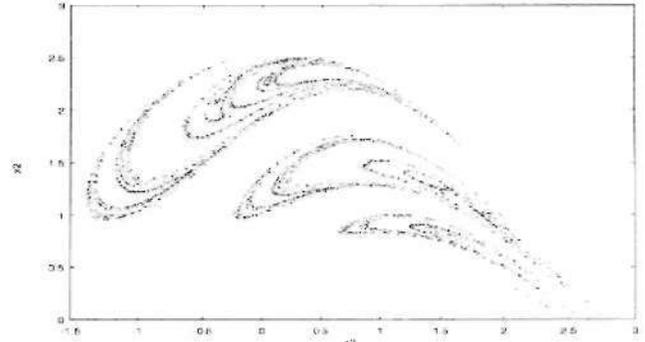


Figura 4 – Mapa de Poincaré para $\alpha = 0,1$, $\beta = 2,0$, $w = 1,0$, $k_r = 1,0$ e com o plano Σ definido em $x_1 = 0,9$.

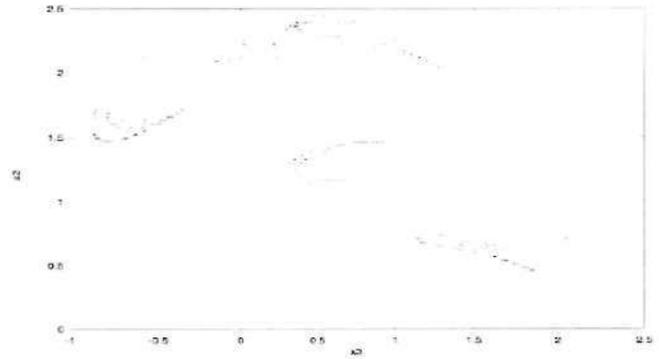


Figura 5 – Mapa de Poincaré para $\alpha = 0,1$, $\beta = 2,0$, $w = 1,0$, $k_r = 0,85$ e com o plano Σ definido em $x_1 = 0,9$.

Percebe-se que não houve uma mudança qualitativa do comportamento do sistema, permanecendo uma oscilação caótica em ambos os casos.

As figuras 6 e 7 mostram os mapas de Poincaré para $[b = 1,705$ e mantendo-se os demais parâmetros inalterados. Para estes valores de amplitude de perturbação, percebe-se claramente a passagem de oscilação caótica para periódica.

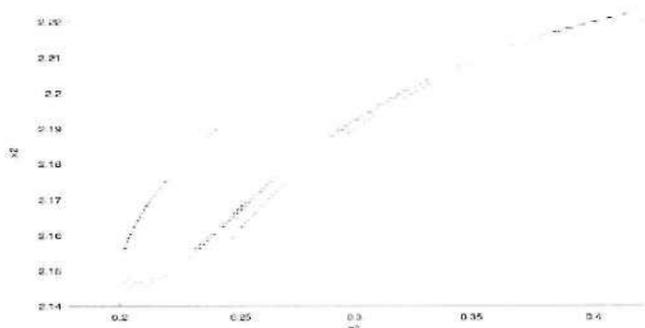


Figura 6 – Mapa de Poincaré para $\alpha = 0,1$, $\beta = 1,705$, $w = 1,0$, $k_r = 1,0$ e com o plano Σ definido em $x_1 = 0,9$.

5 DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Conforme mostrado nas simulações, o comportamento dinâmico do sistema apresentado está diretamente ligado ao tipo de material que compõe o pêndulo e os obstáculos, o que se reflete em termos de valores diferentes para o coeficiente de reposição de velocidade k_r .

As Figuras 4 e 5 mostram que para $b = 2,0$, uma variação no valor de k_r de 1,0 para 0,85 não alterou qualitativamente o comportamento dinâmico do sistema, permanecendo em oscilação caótica. A pequena diferença nos mapas mostrados reflete apenas uma pequena alteração quantitativa.

As Figuras 6 e 7 mostram que para $b = 1,705$ a mudança no valor de k_r já resultou em uma mudança comportamental do sistema, que passou de caótico ($k_r=1,0$) para periódico ($k_r=0,85$), ou seja, uma mudança qualitativa de comportamento.

Uma comparação entre as figuras 4 e 6 deixa evidente que apenas uma mudança quantitativa de comportamento ocorre para uma variação no parâmetro b de 2,0 para 1,705. É importante, entretanto, ressaltar que neste último caso o atrator caracteriza uma situação de micro caos (Thompson & Bishop, 1994), a qual poderia eventualmente ser suportada pelo sistema de controle. Tal comportamento caótico não poderia ser desprezado na primeira situação, devido a maior faixa ocupada pela variação dos estados do sistema.

As Figuras 8 e 9 mostram que a utilização de diagramas de bifurcação é bastante eficaz para um estudo da influência da variação de um determinado parâmetro sobre o comportamento dinâmico do sistema. É importante ressaltar, entretanto, que a obtenção de tais diagramas é bastante demorado, principalmente quando se deseja uma varredura com variação pequena do parâmetro em questão.

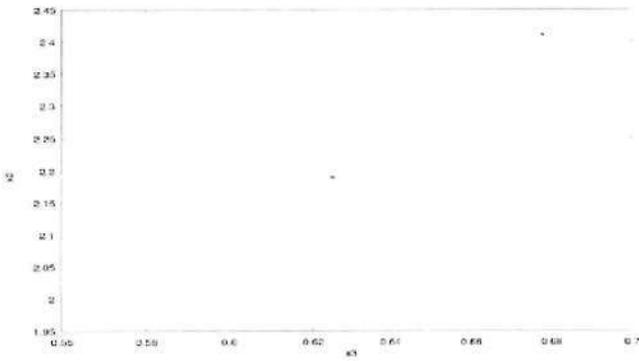


Figura 7 – Mapa de Poincaré para $\alpha = 0,1$, $\beta = 1,705$, $w = 1,0$, $k_r = 0,85$ e com o plano Σ definido em $x_1 = 0,9$.

O mapa de bifurcação da Figura 8 foi construído com os mesmos parâmetros dos mapas apresentados nas Figuras 6 e 7, e representa o comportamento do sistema em função da variação de k entre 1,0 e 0,85. A Figura 9 mostra um detalhamento da região de comportamento caótico do diagrama da Figura 8.

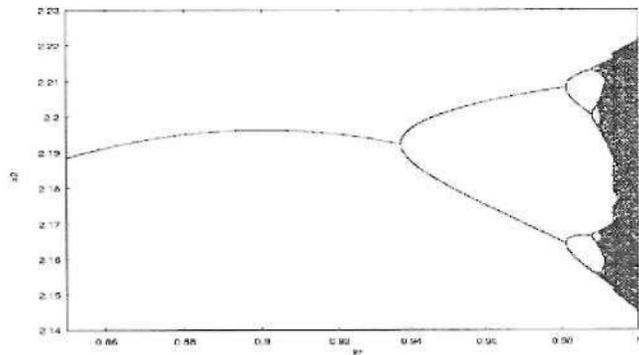


Figura 8 – Diagrama de bifurcação para $\alpha = 0,1$, $\beta = 1,705$, $w = 1,0$ e com o plano Σ definido em $x_1 = 0,9$.

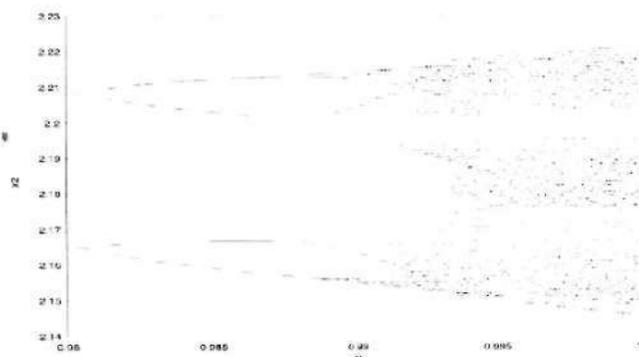


Figura 9 – Detalhamento da região caótica do mapa de bifurcação mostrado na figura 8.

NOGUEIRA, R. G.; MADRID M. K.; PALHARES, A. G. B. Influence of the speed replacement coefficient on the dynamic behavior of an inverted pendulum periodically disturbed and with restrictions in its trajectory. *Semina: Ci. Exatas/Tecnol. Londrina*, v. 21, n. 4, p. 53-57, dez. 2000.

ABSTRACT: *In this work, the results obtained by the simulation of the dynamic behavior of an inverted pendulum periodically disturbed whose movement is restricted due to the existence of obstacles in its trajectory generating a discontinuity, are presented. The intention is to show the change of the behavior due to the variation of the speed replacement coefficient after each collision of the pendulum with the obstacles, whose value depends directly on the materials involved in the collision. The simulations were performed using the Simulink/Matlab, and the analyses were based on maps obtained by means of Poincaré's transformations and bifurcation diagrams, which can show the dynamic behavior of the system.*

KEY WORDS: *inverted pendulum; dynamic behavior; Poincaré's transformations; bifurcation diagrams.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. *Caos uma introdução*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillators, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

HOCKETT, K.; HOLMES, P. Nonlinear oscillators, iterated maps, symbolic dynamics and knotted orbits. *Proceedings of the IEEE*, v. 75, n. 8, p. 1071–1080, 1987.

MEES, A.; SPARROW, C. Some tools for analyzing chaos. *Proceedings of the IEEE*, v. 75, n. 8, p. 1058–1070, 1987.

MOON, F. C. *Chaotic vibrations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1987.

MOORE, D. B.; SHAW, S. W. The experimental response of an impacting pendulum system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 25, n. 1, p. 1–16, 1990.

PARKER, T. S.; CHUA, L. O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.

SEYDEL, R. *Practical bifurcation and stability analysis from equilibrium to chaos*. New York: Springer-Verlag, 1994.

SHAW, S. W.; RAND, R. H. The transition to chaos in a simple mechanical system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 24, n. 1, p. 41–56, 1989.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. (1989). *Nonlinear dynamics and chaos: geometrical methods for engineers and scientists*. England: John Wiley & Sons, 1989.

THOMPSON, J. M. T.; BISHOP, S. R. *Nonlinearity and chaos in engineering dynamics*. England: John Wiley & Sons, 1994.

TUFILLARO, N. B.; ABBOTT, T.; REILLY, J. *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1992.