

Análise de estabilidade de sistemas incertos através do critério de routh

Stability analysis of uncertain systems through routh's criterion

Márcio Roberto Covacic¹; Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira²;
Edvaldo Assunção²

Resumo

O Critério de Estabilidade de Routh é uma ferramenta simples e útil para a análise da estabilidade de sistemas de controle. Neste trabalho, é proposto um método para o estudo da estabilidade de sistemas incertos $dx(t)/dt=(A_o+\alpha\Delta A)x(t)$, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh na análise dos autovalores de $A_o+\alpha\Delta A$. O método determina a faixa de valores de α que garante a estabilidade assintótica do sistema. Uma aplicação análoga para sistemas com realimentação negativa do tipo $dx(t)/dt=(A-BKC)x(t)$, com $K=kI$, também é proposta.

Palavras-chave: Estabilidade. Sistemas Incertos. Critério de Routh. Realimentação da Saída. Polinômio Característico.

Abstract

Routh's Stability Criterion is a simple and useful tool for stability analysis of control systems. In this work, it is proposed a method In this work, it is proposed a method for stability study of uncertain systems $dx(t)/dt=(A_o+\alpha\Delta A)x(t)$, using Routh's Stability Criterion in the analysis of the eigenvalues of $A_o+\alpha\Delta A$. The method determines the range of values of α that guarantees the asymptotic stability of the system. An analog application for negative output feedback systems given by $dx(t)/dt=(A-BKC)x(t)$, where $K=kI$, is also presented.

Key words: Stability. Uncertain Systems. Routh's Criterion. Output Feedback. Characteristic Polynomial.

¹ Doutor em Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista – FEIS-UNESP; Docente do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina – DEEL-UUEL; e-mail: marciocovacic@uel.br

² Docentes do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista – DEE-FEIS-UNESP; e-mail: marcelo@feis.unesp.br; edvaldo@feis.unesp.br

Introdução

Na teoria de controle clássico, entre as diversas especificações de um sistema de controle, a estabilidade é a mais importante. Em vista disso, existem alguns métodos que podem ser utilizados no estudo da estabilidade de sistemas realimentados com controladores proporcionais, tais como o método do lugar das raízes, o critério de estabilidade de Nyquist e o Critério de Estabilidade de Routh.

Na maioria dos cursos de controle ministrados para a graduação, o Critério de Estabilidade de Routh é o primeiro método a ser ensinado. Este fato pode ser observado em quase todos os livros sobre teoria de controle clássico (KUO, 1995; CHEN, 1993; D'AZZO; HOUPIS, 1995; DORF; BISHOP, 1998; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994; OGATA, 2003; ROWLAND, 1986), nos quais o Critério de Estabilidade de Routh é introduzido imediatamente após a definição de estabilidade.

Um sistema de controle com uma função de transferência $G(s)=n(s)/d(s)$ é assintoticamente estável, se e somente se todos os seus pólos possuírem parte real negativa. Por meio do Critério de Estabilidade de Routh, esta condição pode ser verificada sem a necessidade da determinação das raízes de $d(s)$.

Uma aplicação básica do Critério de Estabilidade de Routh é determinação do conjunto de valores de um ganho escalar $k \in \mathbb{R}$ que estabiliza um sistema com uma entrada e uma saída (em inglês, *Single Input Single Output*, SISO) com realimentação da saída. Esta aplicação é abordada em (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; COVACIC, 2007), que também estende os resultados para controladores Proporcional-Integrais-Derivativos (PID) e propõe um programa em *Matlab* para determinar as regiões de estabilidade para os controladores abordados.

Várias aplicações do Critério de Estabilidade de Routh estão disponíveis na literatura. Em (BLONDEL; LUNDVALL, 1995), o critério é utilizado para verificar se um sistema pode ser

estabilizado com um controlador estável. Em (PEÑA, 2003), são apresentados testes para verificar as condições de Routh-Hurwitz e a positividade total de uma matriz, transformando-a em uma matriz triangular superior. Em (HWANG; YANG, 2001), os autores utilizam as condições de Routh-Hurwitz para verificar a propriedade Hurwitz (se todas as raízes possuem parte real negativa) de um segmento de polinômios $(1-\lambda)p_0(s)+\lambda p_1(s)$, sendo que $0 \leq \lambda \leq 1$. Em (BOSE, 1989; YANG; HWANG, 2002), o método é estendido para combinações convexas de polinômios complexos. Em (BARMISH, 1984; BIALAS; GARLOFF, 1985; GUIVER; BOSE, 1983), é apresentado um método para a análise da estabilidade de polinômios, cujos coeficientes sofrem perturbações. Em (BANDYOPADHYAY; ISMAIL; GOREZ, 1994; BANDYOPADHYAY; UPADHYE; ISMAIL, 1997; HWANG; YANG, 1999), o método é estendido para a obtenção de modelos de intervalo de ordem reduzida para intervalos de sistemas lineares, sendo que cada coeficiente de $n(s)$ e $d(s)$ pertence a um intervalo. Em (WEI; YEDAVALLI, 1987), os coeficientes do polinômio característico dependem de um conjunto de parâmetros, com cada parâmetro pertencente a um intervalo, tal que os coeficientes dependem um do outro. Os autores propõem um método para eliminar a dependência entre os parâmetros.

Em Teixeira, Assunção e Covacic (2007), o Critério de Estabilidade de Routh é utilizado para determinar a faixa de valores de um parâmetro $k \in \mathbb{R}$, tal que todas as raízes, $s \in \mathbb{C}$, de um polinômio característico $d(s,k)$, dependente de k , possuam parte real negativa. O polinômio característico $d(s,k)$ é dado por:

$$d(s,k)=d_n(k)s^n+\dots+d_1(k)s+d_0(k), \quad (1)$$

cujos coeficientes $d_i(k)$, $i=1,2,\dots,n$, são polinômios em k , como descrito em (2):

$$d_i(k) = d_{ib_i} k^{b_i} + \dots + d_{i1} k + d_{i0} \quad (2)$$

para $i=0, \dots, n$, sendo b_i o grau de $d_i(k)$.

Neste artigo, o Critério de Estabilidade de Routh será utilizado para a análise da estabilidade de sistemas incertos $dx(t)/dt=(A_o + \alpha\Delta A)x(t)$, sendo A_o e ΔA matrizes constantes e conhecidas e $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro constante incerto. Por meio do estudo dos autovalores de $A_o + \alpha\Delta A$, é determinada a faixa de valores de α que garante a estabilidade assintótica do sistema. De forma análoga, será analisada a estabilidade de sistemas com realimentação negativa do tipo $dx(t)/dt=(A-BKC)x(t)$, com $K=kI$, sendo I uma matriz identidade, cuja ordem corresponde ao número de entradas, que é supostamente igual ao número de saídas do sistema.

Este artigo é organizado como segue. A Seção 2 mostra o Critério de Estabilidade de Routh e apresenta o método proposto em (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; COVACIC, 2007) para a análise da estabilidade de sistemas de controle. A Seção 3 descreve a utilização do Critério de Estabilidade de Routh para a análise da estabilidade de sistemas incertos $dx(t)/dt=(A_o + \alpha\Delta A)x(t)$ e uma aplicação

análoga para sistemas realimentados $dx(t)/dt=(A-BKC)x(t)$, com $K=kI$. A Seção 4 mostra alguns exemplos de aplicação. A Seção 5 é uma conclusão deste trabalho.

Estabilidade de polinômios com dependência polinomial

Considere um sistema linear invariante no tempo $G(s,k)=n(s,k)/d(s,k)$, cujo polinômio característico $d(s,k)$ é dado por (1), sendo $d_n(k), \dots, d_1(k)$ e $d_0(k)$ polinômios em k , descritos em (2), para $i=0, \dots, n$, sendo b_i o grau do coeficiente $d_i(k)$.

Considere que o grau de $d(s,k)$ é constante, isto é, $d_n(k) \neq 0$. O sistema é estável, se e somente se todas as raízes, com relação à variável $s \in \mathbb{C}$, do polinômio característico $d(s,k)$ tiverem parte real negativa. O Critério de Estabilidade de Routh (OGATA, 2003) é uma ferramenta útil para a análise da estabilidade.

Por meio do Critério de Estabilidade de Routh, podem-se obter os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que todas as raízes do polinômio característico $d(s,k)$ possuam parte real negativa, caso existam. Considere a Tabela 1.

Tabela 1. Tabela de Routh.

linha n	s^n	$a_{n1}(k) = \frac{p_{n1}(k)}{q_n(k)}$	$a_{n2}(k) = \frac{p_{n2}(k)}{q_n(k)}$	$a_{n3}(k) = \frac{p_{n3}(k)}{q_n(k)}$	\dots
linha $(n-1)$	s^{n-1}	$a_{(n-1)1}(k) = \frac{p_{(n-1)1}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	$a_{(n-1)2}(k) = \frac{p_{(n-1)2}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	$a_{(n-1)3}(k) = \frac{p_{(n-1)3}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
linha 2	s^2	$a_{21}(k) = \frac{p_{21}(k)}{q_2(k)}$	$a_{22}(k) = \frac{p_{22}(k)}{q_2(k)}$		
linha 1	s^1	$a_{11}(k) = \frac{p_{11}(k)}{q_1(k)}$			
linha 0	s^0	$a_{01}(k) = \frac{p_{01}(k)}{q_0(k)}$			

Os termos da linha n são dados por $a_{n1}(k)$, $a_{n2}(k), \dots$, sendo:

$$\begin{aligned} p_{n1}(k) &= d_n(k), \quad p_{n2}(k) = d_{(n-2)}(k), \\ p_{n3}(k) &= d_{(n-4)}(k), \\ q_n(k) &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Os termos da linha $(n-1)$ são dados por $a_{(n-1)1}(k)$, $a_{(n-1)2}(k), \dots$, sendo:

$$\begin{aligned} p_{(n-1)1}(k) &= d_{(n-1)}(k), \quad p_{(n-1)2}(k) = d_{(n-3)}(k), \\ q_{(n-1)}(k) &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Para determinar estas duas primeiras linhas, seguindo o procedimento acima, considera-se que $d_i(k) = 0$, para $i = -1, -2, -3, \dots$

Os termos da linha j , $j = n-2, \dots, 1, 0$, são dados por:

$$\begin{aligned} a_{j\epsilon}(k) &= \frac{a_{(j+1)1}(k)a_{(j+2)(\epsilon+1)}(k) - a_{(j+2)1}(k)a_{(j+1)(\epsilon+1)}(k)}{a_{(j+1)1}(k)}, \\ a_{ji}(k) &= \frac{\frac{p_{(j+1)1}(k)}{q_{(j+1)}(k)} \frac{p_{(j+2)(\epsilon+1)}(k)}{q_{(j+2)}(k)} - \frac{p_{(j+2)1}(k)}{q_{(j+2)}(k)} \frac{p_{(j+1)(\epsilon+1)}(k)}{q_{(j+1)}(k)}}{\frac{p_{(j+1)1}(k)}{q_{(j+1)}(k)}}. \end{aligned}$$

Então, $a_{ji}(k) = p_{ji}(k)/q_j(k)$, sendo:

$$\begin{aligned} p_{ji}(k) &= p_{(j+1)1}(k)p_{(j+2)(i+1)}(k) - p_{(j+2)1}(k)p_{(j+1)(i+1)}(k), \\ q_j(k) &= q_{(j+2)}(k)p_{(j+1)1}(k), \\ j &= n-2, n-1, \dots, 1, 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Os elementos não nulos $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$, $j = n, n-1, \dots, 1, 0$, $i = 1, 2, \dots$, são polinômios em k . De acordo com o Critério de Estabilidade de Routh, o número de raízes de $d(s, k)$ com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. Então, para um dado valor de $k = k_o$, a condição necessária e suficiente para que todas as raízes de $d(s, k_o)$ tenham parte real negativa é que todos os elementos $a_{ji}(k_o)$, $j = n, n-1, \dots, 1, 0$, da primeira coluna da tabela de Routh apresentem o mesmo sinal.

Em Teixeira, Assunção e Covacic (2007), foi proposto um método para a determinação da faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que todas as raízes de $d(s, k)$ apresentem parte real negativa, a partir das raízes reais dos termos p_{ji} , $j = n, \dots, 1, 0$, da primeira coluna da tabela de Routh. Este método é descrito a seguir.

Sejam $z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}, \dots, z_{jl_j}$ as raízes reais de $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$, tais que $z_{j1} < z_{j2} < z_{j3} < \dots < z_{jl_j}$, sendo as raízes repetidas consideradas somente uma vez, l_j o número de raízes reais distintas de $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$ e $j = n, n-1, \dots, 1, 0$. Note que o sinal de $a_{ji}(k)$ pode mudar, em função de $k \in \mathbb{R}$, somente nas raízes reais de $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$, para $k = z_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, l_j$. Nos intervalos entre essas raízes, definidos por $z_{ji} < k < z_{j(i+1)}$, para $i = 1, 2, \dots, l_{j-1}$, $k < z_{j1}$ e $k > z_{jl_j}$, o sinal de $a_{ji}(k)$ é constante.

Analisando todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh, a variação de sinal ocorre somente nas raízes dos termos $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$, $j = n, n-1, \dots, 1, 0$. Note, em (3), (4) e (5), que $q_n(k)$ e $q_{(n-1)}(k)$ não possuem raízes e que as raízes de $q_j(k)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$, são também raízes de $p_{(n-1)1}(k)$, $p_{(n-2)1}(k), \dots, p_{11}(k)$. Portanto, basta considerar somente as raízes de $p_{n1}(k)$, $p_{(n-1)1}(k), \dots, p_{01}(k)$.

Sejam $z_1, z_2, z_3, \dots, z_l$ as raízes reais de todos os termos $p_{ji}(k)$, $j = n, n-1, \dots, 1, 0$, tais que $z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_l$, sendo as raízes repetidas consideradas somente uma vez, e sendo l o número de raízes reais distintas de todos os termos $p_{ji}(k)$ na primeira coluna da tabela de Routh. Nos intervalos entre essas raízes,

os sinais de todos os elementos da primeira coluna são constantes. Então, para a analisar a estabilidade do sistema, basta considerar um ponto de cada intervalo, de acordo com Figura 1.

Seja $k=m_i$ um ponto qualquer do intervalo I_i . Se todos os termos $a_{ji}(m_i), j=n, n-1, \dots, 1, 0$, na primeira coluna da tabela de Routh, apresentam o mesmo sinal, então todas as raízes de $d(s, m_i)$ apresentam parte real negativa e, assim, o sistema é estável para qualquer valor de k no intervalo I_i . Se o sistema é instável para todos os pontos $m_i, i=1, 2, \dots, l$, então o sistema é instável para qualquer valor de k e o problema de estabilização de malha fechada não tem solução.

Observação 1. (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; COVACIC, 2007) *Uma possível escolha dos pontos m_i é dada abaixo:*

$$m_0 = \begin{cases} 2z_1, & \text{se } z_1 < 0, \\ -1, & \text{se } z_1 \geq 0, \end{cases}$$

$$m_i = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, l-1,$$

$$m_l = \begin{cases} 2z_l, & \text{se } z_l > 0, \\ 1, & \text{se } z_l \leq 0. \end{cases}$$

Análise da estabilidade de sistemas incertos

O método apresentado na seção anterior é útil na análise da estabilidade de sistemas incertos como o sistema definido por:

$$dx(t)/dt = Ax(t) = (A_0 + \alpha \Delta A)x(t), \quad (6)$$

sendo A_0 e $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes conhecidas e $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro desconhecido.

A condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do sistema (6) é que todos os autovalores de $A = A_0 + \alpha \Delta A$ possuam parte real negativa. Os autovalores de A são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$d(s, \alpha) = \det(sI - A) = \det(sI - A_0 - \alpha \Delta A) = 0. \quad (7)$$

O polinômio característico $d(s, \alpha)$ pode ser determinado pelos Lemas 1 e 2, propostos em (TEIXEIRA; MARCHESI; ASSUNÇÃO, 2001):

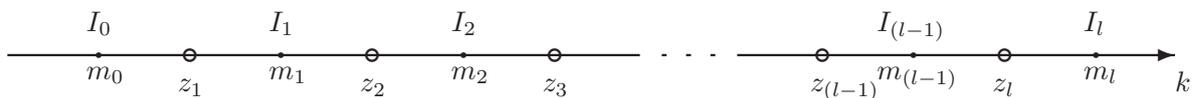


Figura 1. Intervalos entre as raízes reais dos termos da primeira coluna.

Lema 1. (TEIXEIRA; MARCHESI; ASSUNÇÃO, 2001) Considere a matriz $M(\delta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, dada por $M(\delta) = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n$. As matrizes M_i , $i=1, \dots, n$, podem ser decompostas da seguinte forma:

$$M_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim, o determinante de $M(\delta)$, indicado por $|M(\delta)|$, pode ser determinado por:

$$|M(\delta)| = \sum_{s_1=1}^n \dots \sum_{s_m=1}^n \delta_{s_1} \dots \delta_{s_m} \begin{vmatrix} a_{s_1 1} \\ a_{s_2 2} \\ \vdots \\ a_{s_m m} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Lema 2. (TEIXEIRA; MARCHESI; ASSUNÇÃO, 2001) Considere a seguinte matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= m_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + m_{nn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e defina:

$$h_{s_i} = [h_{s_i,1} \dots h_{s_i,i-1} \quad h_{s_i,i} \quad h_{s_i,i+1} \dots h_{s_i,n}]$$

$$= [0 \dots 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0], \quad i = 1, \dots, n.$$

Então, o determinante de M pode ser descrito por:

$$|M| = \sum_{s_1=1}^n \sum_{\substack{s_2=1 \\ s_2 \neq s_1}}^n \dots \sum_{\substack{s_n=1 \\ s_n \neq s_1, \dots, s_{n-1}}}^n m_{1,s_1} \dots m_{n,s_n} \begin{vmatrix} h_{s_1} \\ \vdots \\ h_{s_n} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Obtido o polinômio característico $d(s, \alpha)$, através dos Lemas 1 e 2, a faixa de valores de α para os quais o sistema (6) é estável pode ser determinada através do método proposto na seção anterior.

Observação 2. Na expressão de $d(s, \alpha)$, o coeficiente de s^n é constante e igual a 1. Logo, o grau de $d(s, \alpha)$ é igual a n , para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação 3. Do Lema 1 e de (7), note que $sI - A_o - \alpha \Delta A = \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2 + \delta_3 M_3$, sendo que $\delta_1 = s$, $\delta_2 = I$, $\delta_3 = \alpha$, $M_1 = I$, $M_2 = -A_o$ e $M_3 = -\Delta A$. Assim, $\det(sI - A_o - \alpha \Delta A)$ pode ser obtido utilizando-se (8).

Observação 4. Note que as matrizes $[h_{s_1}^T \dots h_{s_n}^T]^T$ em (9) são independentes de s e α e suas linhas correspondem às linhas da matriz identidade, ordenadas de maneiras diferentes. Logo, os determinantes dessas matrizes são iguais a 1 ou -1 . Assim, o polinômio característico $d(s, \alpha)$ pode ser obtido facilmente e sem a utilização de cálculos simbólicos, que requerem um grande esforço computacional.

Análise da estabilidade de sistemas com realimentação negativa

O método proposto nesta seção também pode ser utilizado para a análise da estabilidade de sistemas com realimentação negativa da saída, como o sistema indicado na Figura 2, com $K = kI$.

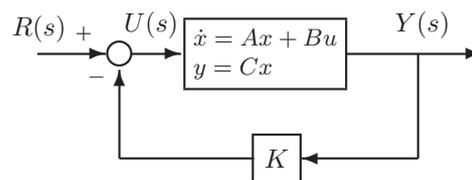


Figura 2. Sistema com realimentação negativa.

Considere a planta definida por (10):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (10)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e a lei de controle $u(t)$ dada por:

$$u(t) = -Ky(t) + r(t), \quad (11)$$

com $K = kI$. Então, o sistema realimentado $\{A - BKC, B, C\}$ da Figura 2 é definido por (12):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= (A - BKC)x(t) + Br(t) = \\ &= (A - kBC)x(t) + Br(t). \end{aligned} \quad (12)$$

O sistema (12) é estável se e somente se todos os autovalores da matriz característica $(A - kBC)$ tiverem parte real negativa. Os autovalores de $(A - kBC)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$d(s, k) = \det(sI - (A - kBC)) = \det(sI - A + kBC).$$

A faixa de estabilidade do sistema pode ser determinada de forma análoga à análise da estabilidade de sistemas incertos proposta nesta seção, considerando, neste caso, $A_o = A$, $\Delta A = -BC$ e $\alpha = k$.

Exemplos

Exemplo 1

Considere o sistema incerto definido por (6), com:

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ \Delta A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

A matriz do sistema $A = A_o + \alpha \Delta A$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 + \alpha & -2 - \alpha & -1 + \alpha \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico, calculado por meio dos Lemas 1 e 2 e da Observação 3, é:

$$d(s, \alpha) = s^3 + (1 - \alpha)s^2 + (2 + \alpha)s + (1 - \alpha).$$

Os valores de α que tornam estável o sistema incerto (6), com as matrizes A_o e ΔA dadas em (13), são determinados através do Critério de Estabilidade de Routh, com a tabela abaixo:

$$\begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left| \begin{array}{ll} a_{31}(\alpha) = \frac{p_{31}(\alpha)}{q_3(\alpha)} & a_{32}(\alpha) = \frac{p_{32}(\alpha)}{q_3(\alpha)} \\ a_{21}(\alpha) = \frac{p_{21}(\alpha)}{q_2(\alpha)} & a_{22}(\alpha) = \frac{p_{22}(\alpha)}{q_2(\alpha)} \\ a_{11}(\alpha) = \frac{p_{11}(\alpha)}{q_1(\alpha)} & \\ a_{01}(\alpha) = \frac{p_{01}(\alpha)}{q_0(\alpha)} & \end{array} \right.$$

cujos termos $p_{ji}(\alpha)$ e $q_j(\alpha)$, $j=3,2,1,0$, $i=1,2$, são dados na Tabela 2.

Tabela 2. Termos da Tabela de Routh para o Exemplo 1.

j	$p_{j1}(\alpha)$	$p_{j2}(\alpha)$	$q_j(\alpha)$
3	1	$2 + \alpha$	1
2	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	1
1	$1 - \alpha^2$	0	$1 - \alpha$
0	$1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3$	0	$1 - \alpha^2$

As raízes reais dos termos $p_{j1}(\alpha)$, na primeira coluna da tabela de Routh, são dadas na Tabela 3.

Tabela 3. Raízes reais dos termos $p_{j1}(\alpha)$.

j	Raízes reais de $p_{j1}(\alpha)$
3	-
2	$z_{21} = 1$
1	$z_{11} = -1, z_{12} = 1$
0	$z_{01} = -1, z_{02} = 1, z_{03} = 1$

Assim, as raízes reais dos termos $p_{j1}(\alpha)$, na primeira coluna da tabela de Routh, em ordem crescente, sem repetição, são:

$$z_1 = -1, z_2 = 1.$$

As raízes acima dividem o conjunto dos números reais em três intervalos. Para a análise da estabilidade do sistema, basta analisar um ponto de cada intervalo, conforme a Figura 1. De acordo com a Observação 1, os pontos escolhidos são:

$$m_0 = -2, m_1 = 0, m_2 = 2.$$

Para os pontos acima, os valores numéricos dos termos da primeira coluna da tabela de Routh são dados na Tabela 4.

Tabela 4. Valores numéricos dos termos $a_{ji}(k)$ para os pontos escolhidos dos intervalos.

i	0	1	2
Intervalo	$k < -1$	$-1 < k < 1$	$k > 1$
m_i	-2	0	2
$a_{31}(m_i)$	1	1	1
$a_{21}(m_i)$	3	1	-1
$a_{11}(m_i)$	-3	1	3
$a_{01}(m_i)$	-9	1	3

Na Tabela 4, observa-se que o sistema é estável somente no intervalo I_1 . Então, os valores de α para os quais o sistema é estável pertencem ao intervalo:

$$-1 < \alpha < 1.$$

Exemplo 2

Considere o sistema incerto definido por (6), com:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A matriz do sistema $A = A_0 + \alpha \Delta A$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0,5\alpha & -2 & 0,5\alpha & 0 \\ 2\alpha & 0 & -3 + \alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 & -4 - \alpha \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico, calculado através dos Lemas 1 e 2 e da Observação 3, é:

$$d(s, \alpha) = s^4 + 10s^3 + (35 - \alpha - 1,5\alpha^2)s^2 + (50 - 3\alpha - 6,5\alpha^2)s + (24 - 2\alpha - 8\alpha^2 - 0,5\alpha^3 + 0,5\alpha^4).$$

Os valores de α que tornam estável o sistema incerto (6), com as matrizes A_o e ΔA dadas em (14), são determinados pelo Critério de Estabilidade de Routh, como discutido no Exemplo 1. A solução do problema para o Exemplo 2 é:

$$-2,8996 < \alpha < 1,6661.$$

Exemplo 3

Considere o sistema realimentado $\{A-BKC, B, C\}$ definido por (12), com:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0,98 \quad 1]. \quad (15)$$

A matriz do sistema de malha fechada $A-BKC$ é dada por:

$$A - kBC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 0,98k & -2 - k \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico, calculado através dos Lemas 1 e 2, de acordo com a Subseção 3.1, é:

$$d(s, k) = s^2 + (2 + k)s + (1 + 0,98k).$$

Os valores de k que tornam estável o sistema realimentado $\{A-BKC, B, C\}$ definido por (12), com as matrizes A, B e C dadas em (15), são determinados pelo Critério de Estabilidade de Routh, como discutido no Exemplo 1. A solução do problema para o Exemplo 3 é:

$$k > -1,0204$$

Conclusões

Em (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; COVACIC, 2007), foi proposto um método para a determinação da faixa de valores de um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de um polinômio $d(s, k)$ possuam parte real negativa, com base no Critério de Estabilidade de Routh. Neste trabalho, este método foi utilizado para a análise da estabilidade de sistemas incertos $dx(t)/dt = (A_o + \alpha \Delta A)x(t)$ em função do parâmetro α . O método também pode ser aplicado em sistemas realimentados $dx(t)/dt = (A - BKC)x(t)$, com $K = kI$, cuja análise da estabilidade é análoga à análise da estabilidade de sistemas incertos. O método é simples e fornece a solução necessária e suficiente para o problema, pela análise de um conjunto finito de casos, explicitamente definidos no método.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido da FAPESP e do CNPq.

Referências

- BANDYOPADHYAY, B.; ISMAIL, O.; GOREZ, R. Routh Pade approximation for interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 39, n. 12, p. 2454–2456, 1994.
- BANDYOPADHYAY, B.; UPADHYE, A.; ISMAIL, O. γ - δ Routh approximation for interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 42, n. 8, p. 1127–1130, 1997.
- BARMISH, B. R. Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 29, n. 10, p. 935–936, 1984.
- BIAŁAS, S.; GARLOFF, J. Stability of polynomials under coefficient perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 30, n. 3, p. 310–312, 1985.
- BLONDEL, V.; LUNDVALL, C. A rational test for strong stabilization. *Automatica*, New York, v. 31, n. 8, p. 1197–1198, 1995.
- BOSE, N. K. Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of complex polynomials. *IEEE*

- Transactions on Circuits and Systems*, New York, v. 36, n. 9, p. 1245–1247, 1989.
- CHEN, C. T. *Analog and digital control system design*. Orlando: Saunders College Publishing, 1993.
- D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. *Linear control system analysis and design: conventional and modern*. [S. l.]: McGraw-Hill, 1995.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern control systems*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1998.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- GUIVER, J. P.; BOSE, N. K. Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 28, n. 1, p. 106-107, 1983.
- HWANG, C.; YANG, S. F. Comments on the computation of interval Routh approximants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 9, p. 1782-1787, 1999.
- HWANG, C.; YANG, S. F. The use of Routh array for testing the Hurwitz property of a segment of polynomials. *Automatica*, New York, v. 37, n. 2, p. 291-296, 2001.
- KUO, B. C. *Automatic control system*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1995.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2003.
- PEÑA, J. M. Characterizations and stable tests for the Routh-Hurwitz conditions and for total positivity. *Linear Algebra and its Applications*, New York, v. 393, n. 1, p. 319–332, 2003.
- ROWLAND, J. *Linear control systems: modeling, analysis, and design*. New York: Wiley, 1986.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Proportional controllers: direct method for stability analysis and MATLAB implementation. *IEEE Transactions on Education*, New York, v. 50, n. 1, p. 74-78, 2007.
- TEIXEIRA, M. C. M.; MARCHESI, H. F.; ASSUNÇÃO, E. Signal-flow graphs: direct method of reduction and MATLAB implementation. *IEEE Transactions on Education*, New York, v. 44, n. 2, p. 185-190, 2001.
- WEI, K. H.; YEDAVALLI, R. K. Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 32, n. 10, p. 907-909, 1987.
- YANG, S. F.; HWANG, C. A test for robust Hurwitz stability of convex combination of complex polynomials. *Journal of the Franklin Institute*, New York, v. 339, n. 2, p. 129-144, 2002.