

Uma solução híbrida analítico-numérica para o problema térmico em dutos bicônicos

A hybrid analytical-numerical solution to the thermal problem inside biconical ducts

Thiago Antonini Alves¹; Ricardo Alan Verdú Ramos²;
Cassio Roberto Macedo Maia³

Resumo

Neste trabalho foi apresentada uma solução híbrida analítico-numérica do problema de transferência de calor de escoamento laminar desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos Newtonianos no interior de dutos bicônicos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG). Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno uma Transformação Conforme foi utilizada visando transformar o domínio em um sistema de coordenadas mais apropriado. Feito isso, a TTIG foi aplicada na equação da energia para determinação da distribuição de temperatura. Os resultados foram obtidos para parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de Nusselt local e médio e o comprimento de entrada térmica.

Palavras-chave: Transformada Integral. Transformação Conforme. Convecção Forçada. Bicônico.

Abstract

In this work was presented a hybrid analytical-numerical solution to heat transfer problem of thermally developing Newtonian laminar flow inside biconical ducts employing the Generalized Integral Transform Technique (GITT). In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was used to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, the GITT was applied on the energy equation to obtain the temperature distribution. Numerical results were obtained for thermal parameters of interest, such as: bulk mean temperature, local and mean Nusselt number, and thermal entry length.

Keywords: Integral Transform. Conformal Transform. Forced Convection. Biconical.

¹ Prof. Dr. Depto. Acadêmico de Mecânica, UTFPR, Ponta Grossa, PR, Brasil; E-mail: thiagoalves@utfpr.edu.br

² Prof. Dr. Depto. de Eng. Mecânica, USP Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, SP, Brasil; E-mail: ramos@dem.feis.unesp.br

³ Prof. Dr. Depto. de Eng. Mecânica, USP Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, SP, Brasil; E-mail: cassio@dem.feis.unesp.br

Lista de símbolos

A_{ij}	coeficiente do termo transformado
A_S	área da seção transversal do duto [m ²]
B_{ijmn}	coeficiente do termo transformado
c_p	calor específico a pressão constante [kJ/(kg.K)]
D_h	diâmetro hidráulico [m]
h_u	coeficiente métrico do sistema de coordenadas transformado
h_v	coeficiente métrico do sistema de coordenadas transformado
H	função definida
J	Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas
k	condutividade térmica [W/(m ² .K)]
K_i	autofunções normalizadas relativas às autofunções ψ_i
L_{th}	comprimento de entrada térmica
M	ordem de truncamento da expansão
M_m	norma das autofunções ϕ_m
N	ordem de truncamento da expansão
N_i	norma das autofunções ψ_i
Nu	número de Nusselt local
Nu_{med}	número de Nusselt médio
Nu_{∞}	número de Nusselt limite
Pe	número de Péclet
Per	perímetro do duto [m]
t	tempo [s]
T	potencial temperatura [K]
T_0	temperatura de entrada do fluido [K]
T_p	temperatura prescrita na parede [K]
u	coordenada do sistema transformado
u_0	parâmetro que define contorno no plano (u, v)
v	coordenada do sistema transformado
v_0	parâmetro que define contorno no plano (u, v)
w	componente axial da velocidade do fluido [m/s]
w_{med}	velocidade média do fluido [m/s]
W	componente adimensional axial da velocidade do fluido
x	coordenada espacial [m]
X	coordenada espacial adimensional
y	coordenada espacial [m]
Y	coordenada espacial adimensional
z	coordenada espacial [m]
Z	coordenada espacial adimensional
Z_m	autofunções normalizadas relativas às autofunções ϕ_m

Letras gregas

ϕ_m	autofunções relativa à coordenada v
λ_m	autovalores associados às autofunções ϕ_m
Γ	contorno dos dutos
μ_i	autovalores associado às autofunções ψ_i
θ	temperatura adimensional
θ_{med}	temperatura adimensional média de mistura
$\bar{\theta}_i$	potencial temperatura adimensional transformado
$\tilde{\theta}_{im}$	potencial velocidade adimensional transformado
ρ	massa específica [kg/m ³]
Ω	domínio referente à área de seção transversal
ψ_i	autofunções relativas à coordenada u
ζ	variável complexa no plano (u, v)
ω	variável complexa no plano (u, v)

Símbolos especiais

∇	Operador Nabla
∂	Operador Del

Sobrescritos

–	Transformação Integral em relação à coordenada u
~	Transformação Integral em relação à coordenada v

Subscritos

i	Ordem do autovalor e de funções relacionadas
j	Ordem do autovalor e de funções relacionadas
m	Ordem do autovalor e de funções relacionadas
n	Ordem do autovalor e de funções relacionadas

Introdução

Na otimização de um trocador de calor os parâmetros termo-fluidodinâmicos são calculados visando à intensificação do coeficiente global de transferência de calor sem ultrapassar os limites admissíveis da perda de pressão (SHAH; LONDON, 1978). A determinação destes parâmetros envolve, essencialmente, o cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt para os escoamentos interno e externo (KAKAÇ; SHAH; AUNG, 1998).

Uma nova concepção de trocadores de calor com dutos de seção bicônica, dispostos em um arranjo quincôncio, define uma estrutura de canais ondulados ao escoamento externo que permite um maior contato do fluido junto às paredes dos dutos e, conseqüentemente, uma diminuição dos efeitos dos vórtices na região posterior (ANTONINI ALVES, 2006).

Como primeiro passo desta proposta, Antonini Alves, Ramos e Maia (2015) efetuaram o estudo do problema fluidodinâmico para o escoamento laminar desenvolvido de fluidos Newtonianos no interior de dutos de seção bicônica. Dando continuidade a esta linha de pesquisa, no presente trabalho foi realizada uma análise do problema relacionado à transferência de calor considerando um perfil de temperatura de entrada uniforme e condições de contorno de Dirichlet (temperatura prescrita na parede).

A maior dificuldade para a obtenção de solução analítica deste problema consiste na impossibilidade da utilização da Técnica de Separação de Variáveis e, também, pela dificuldade da aplicação das condições de contorno devido à característica bidimensional não-convencional da geometria bicônica (MAIA, 2003).

Neste contexto, para facilitar a aplicação das condições de contorno, inicialmente proceder-se-á uma mudança de variáveis através de um sistema de coordenadas resultante de uma Transformação Conforme – TC (CHURCHILL, 1975). Este procedimento simplifica o tratamento dos operadores Laplacianos no novo sistema de coordenadas. Feito isso, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG (COTTA, 1998) é aplicada

sobre a equação da energia para a obtenção do campo de temperatura no escoamento.

Os parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de Nusselt local e médio, comprimento de entrada térmica são, então, determinados e analisados para diversos formatos bicônicos.

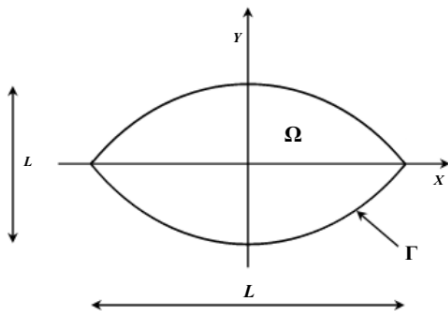
Procedimento híbrido analítico-numérico

Considera-se um escoamento laminar em regime permanente e em desenvolvimento térmico no interior de dutos bicônicos, com perfil de temperatura de entrada uniforme e temperatura prescrita de parede. As propriedades dos fluidos permanecem constantes em todo o domínio e os efeitos da dissipação viscosa e da condução axial são desprezados (ANTONINI ALVES; RAMOS; MAIA, 2016). Desta forma, para fluidos Newtonianos, a equação da energia para o sistema de coordenadas (Fig. 1), é escrita como:

$$\rho c_p w(x,y) \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = k \nabla^2 T(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega; \quad z > 0\}, \quad (1)$$

sendo que, ρ representa a massa específica do fluido, c_p é o calor específico a pressão constante, k é a condutividade térmica, w é a velocidade, T é a temperatura, Γ o contorno e Ω o domínio da geometria bicônica.

Figura 1: Geometria original do problema.



Fonte: autoria própria.

As condições de entrada e de contorno são dadas por:

$$T(x,y,z) = T_0, \quad \{(x,y) \in \Omega, \quad z = 0\}, \quad (2)$$

$$T(x,y,z) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, \quad z > 0\}, \quad (3)$$

sendo que, T_0 e T_p são as temperaturas de entrada e de parede, respectivamente.

O perfil de velocidade $w(x,y)$ do escoamento no interior do duto bicônico é obtido por meio da TTIG, conforme apresentado em Antonini Alves, Ramos e Maia (2015).

Adimensionalização

Reescrevendo a equação da energia e as condições de entrada e de contorno, Eqs. (1), (2) e (3), na forma adimensional, tem-se que:

$$W(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \quad Z > 0\}, \quad (4)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \quad Z = 0\}, \quad (5)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, \quad Z > 0\}, \quad (6)$$

com,

$$X = \frac{x}{D_h}, \quad (7)$$

$$Y = \frac{y}{D_h}, \quad (8)$$

$$Z = \frac{z}{D_h}, \quad (9)$$

$$D_h = \frac{4A_S}{Per}, \quad (10)$$

$$W(X,Y) = \frac{w(x,y)}{w_{med}}, \quad (11)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p w_{med} D_h}{k}, \quad (12)$$

$$\theta(X,Y,Z) = \frac{T(x,y,z) - T_p}{T_0 - T_p}, \quad (13)$$

sendo, D_h o diâmetro hidráulico, Pe o número de Péclet, A_S a área da seção transversal, Per o perímetro do contorno analisado e w_{med} a velocidade média do fluido.

Transformação de coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico, foi utilizada uma Transformação Conforme expressa por:

$$\zeta = \frac{1}{2} i \bar{\omega}^2, \quad (14)$$

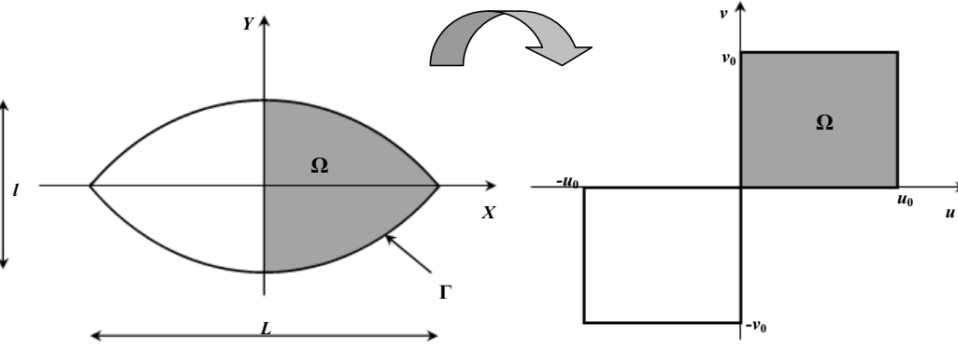
sendo que, ζ é a variável complexa no plano $\zeta = X + iY$ e $\bar{\omega}$ é o conjugado da variável complexa no plano transformado $\bar{\omega} = u + iv$.

Esta relação permite transformar o domínio bicônico no plano (X,Y) em um domínio retangular no plano (u,v) , limitado pelas retas $u = 0, u = -u_0, u = u_0, v = 0, v = -v_0, v = v_0$, com $u_0 = v_0$, conforme ilustrado na Fig. 2 para o domínio bicônico $(u_0/v_0) = 1, 00$.

As relações de transformação de coordenadas são:

$$X = uv, \quad (15)$$

Figura 2: Transformação do domínio bicônico ($u_0/v_0 = 1,00$) no plano (X, Y) para o plano (u, v) .



Fonte: autoria própria.

$$Y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad (16)$$

$$Z = z. \quad (17)$$

A Transformação Conforme dada pela Eq. (14) satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. Portanto, os coeficientes métricos h_u e h_v e o Jacobiano $J(u, v)$ da transformação são expressos por:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (18)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = u^2 + v^2. \quad (19)$$

Este novo sistema de coordenadas é ortogonal e gera parábolas confocais de eixo comum (SPIEGEL; LIU, 1999), aqui denominadas somente por geometrias bicônicas (Fig. 3).

Com estas novas variáveis definidas, a equação da energia e a condição de entrada, transformam-se em:

$$H(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial v^2}, \quad (20)$$

$$\{(u, v) \in \Omega\},$$

$$\theta(u, v, Z) = 1, \quad \{(u, v) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (21)$$

com $H(u, v) = J(u, v)W(u, v)$.

No plano (u, v) é suficiente considerar somente o domínio definido na região $\{0 \leq u \leq u_0\}$ e $\{0 \leq v \leq v_0\}$ (região sombreada Ω).

As condições de contorno no novo sistema de coordenadas são expressas por:

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = 0, Z > 0\}, \quad (23)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0, \quad \{u = u_0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (24)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = v_0, Z > 0\}. \quad (25)$$

Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG)

Para a obtenção da solução da equação da energia no novo sistema de coordenadas aplica-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG sobre a Eq. (20) visando proceder a remoção das derivadas de segunda ordem. Para este fim, escreve-se o potencial $\theta(u, v, Z)$ em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, considera-se, primeiramente, o problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0\}, \quad (26)$$

com,

$$\frac{d\psi(0)}{du} = 0, \quad (27)$$

$$\psi(u_0) = 0. \quad (28)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas associados a este problema são dados, respectivamente, por:

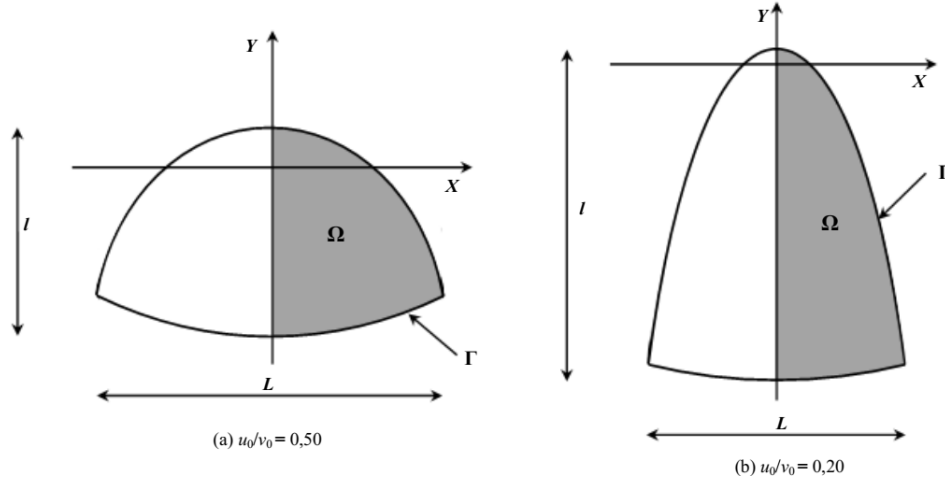
$$\mu_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2u_0}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (29)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (30)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, Z) = \int_0^{u_0} K_i(u) \theta(u, v, Z) du, \quad (31)$$

Figura 3: Transformação do domínio bicônico no plano (X, Y) para o plano (u, v) .



Fonte: autoria própria.

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, Z), \quad (32)$$

sendo que, $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{\sqrt{N_i}}, \quad (33)$$

com,

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2}, \quad (34)$$

sendo que, N_i são as integrais de normalização das autofunções $\psi_i(u)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da energia e utilizando-se das condições de contorno e das equações que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se a primeira transformação da equação diferencial:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, Z)}{\partial v^2}, \quad (35)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du. \quad (36)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , considera-se agora o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\}, \quad (37)$$

com,

$$\frac{d\phi(0)}{dv} = 0, \quad (38)$$

$$\phi(v_0) = 0. \quad (39)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas para este novo problema são dadas por:

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2v_0}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (40)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v). \quad (41)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, Z) du dv, \quad (42)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad (43)$$

sendo que, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas e são expressas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(u)}{\sqrt{M_m}}, \quad (44)$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (45)$$

sendo que, M_m são as integrais de normalização das autofunções $\phi_m(v)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada em u e utilizando-se das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor, obtém-se a transformação integral da equação da energia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0, \quad (46)$$

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} Z_m(v)Z_n(v)A_{ij}(v)dv$$

$$= \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_j(u)K_i(u)Z_m(v)Z_n(v)H(u,v)dudv, \quad (47)$$

sendo que os parâmetros B_{ijmn} são integráveis e, portanto, conhecidos.

A solução do sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias dado permite a obtenção do potencial transformado, quando submetido à condição de entrada transformada dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u)Z_m(v)\theta(u,v,0)dudv, \quad (48)$$

$$W(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u)Z_j(v)\tilde{W}_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u)Z_j(v). \quad (49)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado da Eq. (48) pode ser determinado numericamente resolvendo o sistema de equações diferenciais correspondente e truncando-se a expansão para uma dada ordem $i = M$ e $j = N$, de acordo com a precisão estabelecida:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0. \quad (50)$$

O potencial temperatura pode, então, ser reconstruído utilizando-se da transformada inversa, para a expansão truncada até a ordem M e N :

$$\theta(u,v,Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u)Z_m(v)\tilde{\theta}_{im}(Z). \quad (51)$$

Obviamente, quanto maior N e M maior será a precisão dos resultados, sendo que, do ponto de vista computacional, o duplo somatório poderia ser resolvido como proposto por Mikhailov e Cotta (1996), permitindo a redução deste custo computacional através do reordenamento dos termos e substituição por um somatório simples. No entanto, pela simplicidade do problema em questão, isso não se faz necessário.

Parâmetros térmicos de interesse

A temperatura média de mistura pode ser expressa por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_{\Omega} \theta(X,Y,Z)W(X,Y)d\Omega. \quad (52)$$

Dessa forma, no plano (u,v) , θ_{med} pode ser determinada por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} \theta(u,v,Z)W(u,v)J(u,v)dvdu. \quad (53)$$

O número de Nusselt local é definido por:

$$Nu(Z) = -\frac{1}{4\theta_{med}(Z)} \frac{d\theta_{med}(Z)}{dZ}. \quad (54)$$

O número de Nusselt médio pode ser obtido por integração analítica dada por:

$$Nu_{med}(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(Z)dZ = -\frac{1}{4Z} \ln[\theta_{med}(Z)]. \quad (55)$$

De acordo com Shah e London (1978), o comprimento de entrada térmica, L_{th} , é definido, com sendo a posição em que o número de Nusselt local é 5% maior do que o número de Nusselt na região em que o fluido está termicamente desenvolvido (número de Nusselt limite). Desta forma:

$$L_{th} = \text{raiz positiva de } \{1,05Nu(\infty) - Nu(Z) = 0\}. \quad (56)$$

Resultados e discussão

Para a obtenção dos resultados numéricos, o Método de Quadratura de Gauss foi utilizado para o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ijmn} e demais parâmetros térmicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do Jacobiano nos pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações diferenciais foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado fazendo uso da rotina DIVPAG da biblioteca IMSL Fortran (1994) e do truncamento da expansão dada pela Eq. (51) para diversas ordens M e N .

Por meio de uma análise de convergência, foi verificado que a convergência da temperatura adimensional média de mistura é mais lenta na região próxima a entrada dos dutos e/ou para $(u_0/v_0) \leq 0,20$, sendo necessário considerar truncamentos da série com ordem superior a $M = N = 30$, para alcançar de pelo menos quatro dígitos de precisão.

O tempo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros térmicos de interesse foi pequeno, cerca de 25 a 30 segundos em um computador pessoal comum (Intel Core™ i7 3,6GHz e com 16GB de memória RAM).

Na Tabela 1 e na Figura 4 os resultados do comportamento da temperatura adimensional média de mistura são apresentados para diversas configurações bicônicas.

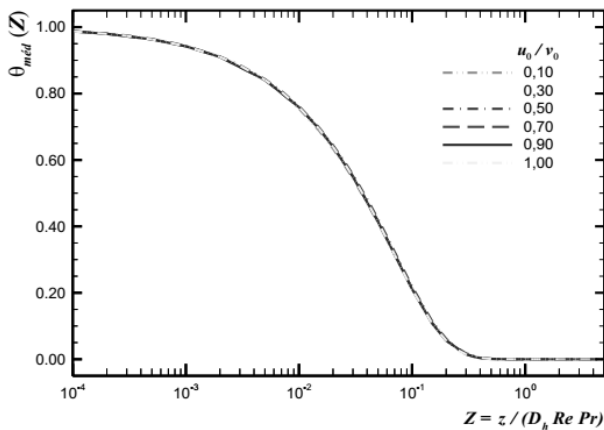
Os resultados obtidos para o número de Nusselt local são apresentados na Tab. 2 e na Fig. 5, enquanto que a Tab. 3 e a Fig. 6 apresentam os resultados encontrados para o número de Nusselt médio considerando diversos dutos bicônicos. Como esperado, o número de Nusselt diminui ao longo do duto.

Tabela 1: Temperatura adimensional média de mistura.

Z	u_0/v_0			
	0,20	0,40	0,60	0,80
0,001	0,9436	0,9431	0,9426	0,9422
0,002	0,9113	0,9115	0,9107	0,9103
0,003	0,8853	0,8858	0,8849	0,8843
0,005	0,8425	0,8435	0,8422	0,8414
0,007	0,8066	0,8080	0,8064	0,8054
0,010	0,7606	0,7625	0,7605	0,7591
0,020	0,6428	0,6456	0,6424	0,6401
0,030	0,5541	0,5572	0,5530	0,5500
0,050	0,4212	0,4242	0,4186	0,4147
0,070	0,3242	0,3264	0,3202	0,3161
0,100	0,2205	0,2215	0,2156	0,2118
0,200	0,0618	0,0611	0,0582	0,0564
0,300	0,0174	0,0169	0,0157	0,0150
0,500	0,0014	0,0013	0,0011	0,0011
0,700	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
1,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: autoria própria.

Figura 4: Distribuição da temperatura adimensional média de mistura para o escoamento laminar em diversos dutos bicônicos.



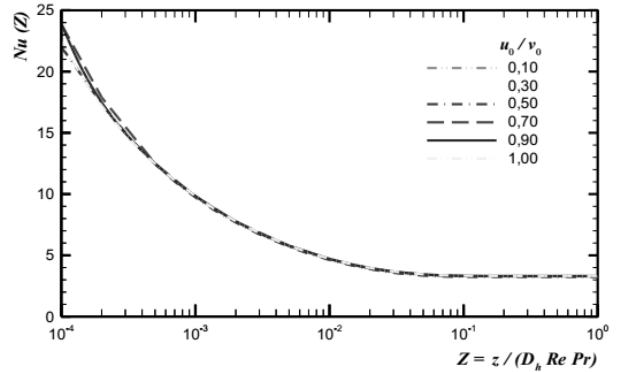
Fonte: autoria própria.

Tabela 2: Número de Nusselt local.

Z	u_0/v_0			
	0,20	0,40	0,60	0,80
0,001	9,935	9,726	9,766	9,816
0,002	7,802	7,660	7,721	7,765
0,003	6,788	6,692	6,751	6,793
0,005	5,743	5,674	5,731	5,772
0,007	5,175	5,113	5,170	5,211
0,010	4,659	4,604	4,662	4,703
0,020	3,890	3,850	3,913	3,958
0,030	3,577	3,548	3,617	3,664
0,050	3,324	3,317	3,390	3,438
0,070	3,236	3,249	3,316	3,361
0,100	3,193	3,221	3,263	3,307
0,200	3,175	3,214	3,247	3,281
0,300	3,174	3,214	3,247	3,281
0,500	3,174	3,214	3,247	3,281
0,700	3,174	3,214	3,247	3,281
1,000	3,174	3,214	3,247	3,281

Fonte: autoria própria.

Figura 5: Distribuição do número de Nusselt local para o escoamento laminar em diversos dutos bicônicos.



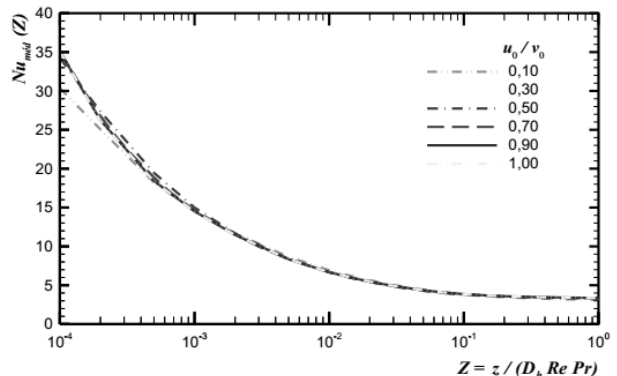
Fonte: autoria própria.

Tabela 3: Número de Nusselt médio.

Z	u_0/v_0			
	0,20	0,40	0,60	0,80
0,001	14,51	14,85	14,79	14,87
0,002	11,61	11,59	11,69	11,75
0,003	10,23	10,13	10,22	10,30
0,005	8,57	8,51	8,59	8,64
0,007	7,68	7,61	7,68	7,73
0,010	6,84	6,78	6,85	6,89
0,020	5,52	5,47	5,53	5,58
0,030	4,92	4,87	4,94	4,98
0,050	4,32	4,29	4,36	4,40
0,070	4,02	4,00	4,07	4,11
0,100	3,78	3,77	3,84	3,88
0,200	3,48	3,49	3,56	3,60
0,300	3,38	3,40	3,46	3,50
0,500	3,30	3,33	3,38	3,43
0,700	3,26	3,30	3,35	3,39
1,000	3,23	3,27	3,33	3,36

Fonte: autoria própria.

Figura 6: Distribuição do número de Nusselt médio para o escoamento laminar em diversos dutos bicônicos.



Fonte: autoria própria.

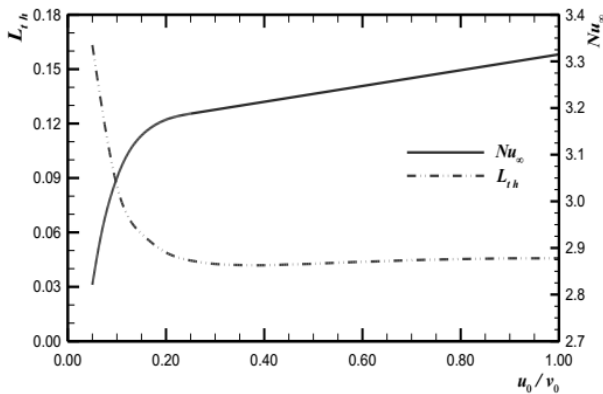
Além disso, os comportamentos do número de Nusselt limite e do comprimento de entrada térmica são apresentados na Tab. 4 e na Fig. 7.

Tabela 4: Parâmetros térmicos relevantes.

u_0/v_0	Nu_∞	Nu_{med}				L_{th}
		10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	
0,10	3,049	14,51	6,96	3,84	3,14	0,0856
0,20	3,175	14,76	6,75	3,77	3,23	0,0489
0,30	3,197	15,01	6,68	3,74	3,25	0,0426
0,40	3,214	15,01	6,68	3,76	3,27	0,0419
0,50	3,230	14,94	6,71	3,79	3,30	0,0427
0,60	3,247	14,83	6,73	3,82	3,33	0,0438
0,70	3,264	14,75	6,74	3,84	3,35	0,0447
0,80	3,281	14,68	6,75	3,86	3,36	0,0453
0,90	3,298	14,60	6,75	3,87	3,37	0,0457
1,00	3,315	14,55	6,76	3,87	3,37	0,0458

Fonte: autoria própria.

Figura 7: Comportamento do número de Nusselt limite e do comprimento de entrada térmica para o escoamento laminar em dutos bicônicos.



Fonte: autoria própria.

Conclusões

No presente trabalho, foi analisada uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometrias não-convencionais.

Para tal, uma solução híbrida analítico-numérica do problema de transferência de calor no escoamento laminar desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos Newtonianos no interior de dutos bicônicos submetidos às condições de contorno de Dirichlet (temperatura prescrita na parede) e perfil de temperatura de entrada uniforme foi realizada utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) e a uma Transformação Conforme.

Os parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de Nusselt local, médio e limite e comprimento de entrada térmica foram obti-

dos para dutos de diferentes configurações geométricas bicônicas.

Destaca-se que estes resultados são inéditos na literatura consultada e serão utilizados para uma nova concepção de trocadores de calor com dutos bicônicos, dispostos em um arranjo quincôncio, visando o processo de intensificação do coeficiente global de transferência de calor sem ultrapassar os limites admissíveis da perda de pressão.

Finalmente, observa-se que a Técnica da Transformada Integral Generalizada e a Transformação Conforme estão sendo aplicadas com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, os quais muitas vezes não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Referências

ALVES, T. A. *Aplicação da transformada integral na solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos em domínios de geometrias não convencionais*. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2006.

ALVES, T. A.; RAMOS, R.; MAIA, C. Uma solução híbrida analítico-numérica para o escoamento laminar em dutos bicônicos. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, Londrina, v. 36, n. 2, p. 119-132, 2015. <http://dx.doi.org/10.5433/1679-0375.2015v36n2p119>.

ALVES, T. A.; RAMOS, R.; MAIA, C. Aplicação da transformada integral generalizada e da transformação conforme na solução de um problema de convecção forçada laminar em dutos de setor de anel circular. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Catalunya, v. 32, n. 4, p. 261–269, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2015.09.001>.

CHURCHILL, R.V. (Ed.). *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo, Brasil: McGraw-Hill, 1975.

COTTA, R.M. (Ed.). *The integral transform method in thermal and fluids science and engineering*. New York, USA: Begell House, 1998.

IMSL library. 7th ed. Texas, USA: GNB building, 1979.

KAKAÇ, S.; SHAH, R.K.; AUNG, W. (Ed.). *Handbook of single-phase convective heat transfer*. New York, USA: John Wiley, 1998.

MAIA, C. R. M. *Solução de problemas difusivos e difusivos-convectivos em domínio de geometria elíptica e bicôncava pela técnica da transformada integral generalizada*. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campinas, 2003.

MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M. Ordering rules for double or triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, New York, v. 23, n. 2, p. 299-303, 1996. [https://doi.org/10.1016/0735-1933\(96\)00015-2](https://doi.org/10.1016/0735-1933(96)00015-2).

SHAH, R. K.; LONDON, A. L. (Ed.). *Laminar flow forced convection in ducts*. New York, USA: Academic Press, 1978.

SPIEGEL, M. R.; LIU, J. (Ed.). *Mathematical handbook of formulas and tables*. New York, USA: McGraw-Hill, 1999.

Recebido em: 20 mar. 2016
Aceito em: 19 fev. 2018