

Modelagem por elementos finitos de pórticos considerando as não linearidades física e geométrica

Finite element modeling of frames considering the physical and geometric nonlinearity

Luiz Antonio Farani de Souza¹

Abstract

Com o avanço tecnológico, o grau de segurança obtido e o baixo custo de pesquisas computacionais, comparados com ensaios experimentais, vêm possibilitando cada vez mais a aplicação de técnicas numéricas na solução não linear de problemas de estruturas. Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas com a finalidade de prever a degradação do material. Neste artigo é apresentada uma formulação por meio do Método dos Elementos Finitos considerando as não linearidades física e geométrica para a análise de pórticos planos. O comportamento do material é descrito por um modelo fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo. Na obtenção do vetor de força interna, o módulo de rigidez à flexão equivalente é determinado com a divisão da seção transversal em camadas. Para traçar a trajetória de equilíbrio com pontos limites da estrutura é utilizado o método iterativo de Chebyshev, com taxa de convergência cúbica, associado à estratégia de Controle de Deslocamento Generalizado. Resultados numéricos de problemas encontrados na literatura são confrontados com os obtidos pelo código computacional desenvolvido. A modelagem proposta apresenta potencialidade na simulação da capacidade resistente última de estruturas do tipo pórtico.

Keywords: Mecânica do Dano Contínuo. Elementos Finitos. Técnica de Continuação. Não Linearidade Geométrica. Chebyshev.

Resumo

With advances in technology, the degree of safety obtained and the low cost of computational researches, compared with experimental tests, have enabled the application of numerical techniques for solution of nonlinear problems of structures. The damage constitutive models have been used as an important tool to analyze the structures stiffness loss in order to prevent the material degradation. This paper presents a formulation by means of Finite Element Method considering physical and geometric nonlinearities for the analysis of plane frames. The behavior of the material is described by a model based on Continuum Damage Mechanical. In obtaining the internal force vector, the equivalent flexural stiffness modulus is obtained by dividing the cross section in layers. In order to trace the equilibrium path with limits points of the structure it is used the Chebyshev iterative method, with cubic convergence rate, associated to the Generalized Displacement Control strategy. Numerical results found in literature are compared with those obtained by computational code developed. The proposed modeling presents potentiality in the simulation of the ultimate strength of frame type structures.

Palavras-chave: Continuum Damage Mechanical. Finite Elements. Path-Following Technique. Geometric Nonlinearity. Chebyshev.

¹ Docente do Curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR; lasouza@utfpr.edu.br

Introdução

Tornar os sistemas estruturais mais econômicos, por meio da redução do seu peso e do consumo de materiais sem, no entanto, diminuir sua segurança e durabilidade, tem sido um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural. Nessa área, portanto, as pesquisas têm sido direcionadas no sentido de obtenção de estruturas cada vez mais leves e esbeltas (ROCHA, 2000).

À proporção que o elemento estrutural se torna mais esbelto, o efeito da não linearidade geométrica no mesmo se torna cada vez mais importante e dá origem a vários fenômenos, como por exemplo, a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e o surgimento de pontos críticos ou singulares ao longo do caminho não linear de equilíbrio. A presença dessa não linearidade exige o desenvolvimento de técnicas de cálculo mais sofisticadas e um conhecimento cada vez mais profundo do comportamento estrutural.

Além da não linearidade geométrica, na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais (não linearidade física) que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica, acontecendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mau condicionamento numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer técnicas de controle de iteração e força que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento inelástico dos materiais (MUÑOZ; ROEHL, 2012).

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) é uma ferramenta para a análise da deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica. Enquanto a Mecânica da Fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a MDC estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material. Os modelos constitutivos formulados pela aplicação dos conceitos dessa teoria permitem considerar as perdas de rigidez e resistência, observadas em diferentes materiais, como resultado do processo evolutivo de microfissuração. A MDC pretende descrever a evolução dos fenômenos dessas perdas que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, correspondente à ruptura do elemento de volume. Para tanto, fundamenta-se nos princípios, e métodos, da mecânica dos meios contínuos e da termodinâmica dos processos irreversíveis (PROENÇA, 1992).

A variável dano não é uma grandeza física mensurável diretamente, mas para fins de modelagem matemática é possível relacioná-la à redução progressiva de características mecânicas globais como, por exemplo, o módulo de elasticidade. Assim sendo, uma variável interna representativa do estado de deterioração do material é definida de modo a permitir, quantificar e distinguir, macroscopicamente, um elemento de volume deteriorado de um outro íntegro.

Uma metodologia eficiente de solução de problemas com não linearidade física e/ou geométrica deve ser capaz de superar as dificuldades numéricas associadas ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir. São definidos os seguintes tipos de pontos críticos: pontos limites de força (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*); e ponto de bifurcação, a partir do qual derivam duas ou mais trajetórias de equilíbrio (MAXIMIANO, 2012; SANTOS et al.,

2010).

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Modificações nesse método podem ser feitas: resolver o sistema de equações não lineares de forma inexata, ou seja, resolvê-lo por algum método iterativo impondo uma precisão, como no método de Newton Inexato; aproximar a matriz Jacobiana utilizando diferenças finitas; e substituir a Jacobiana por outra matriz com alguma propriedade, como nos métodos Quase - Newton.

Até a década de 1980, os métodos iterativos que possuíam ordem de convergência maior que a do método de Newton-Raphson exigiam o cálculo de derivadas de ordens superiores. Sendo assim, quanto maior era a ordem de convergência maior era também o custo computacional, de modo a tornar o uso prático destes métodos restrito a alguns poucos casos. Há métodos que possuem taxa de convergência cúbica, como por exemplo, os métodos pertencentes à classe Chebyshev-Halley (SOUZA, 2015).

Neste artigo é apresentado um procedimento numérico para a análise estrutural estática de pórticos planos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo incorporado no modelo os efeitos das não linearidades física e geométrica. A não linearidade do material é descrita por um modelo constitutivo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado tanto à tração quanto à compressão. A não linearidade geométrica é baseada na formulação Lagrangiana Total, em que as equações de equilíbrio são avaliadas com relação à configuração inicial indeformada da estrutura (configuração de referência). Na discretização dos pórticos são utilizados elementos de viga com dois nós e três graus de liberdade/nó (duas translações e uma rotação). Nas análises, considera-se que a ligação entre a viga e o pilar seja rígida.

O problema estrutural não linear é solucionado

por meio do método iterativo de Chebyshev, com convergência cúbica, associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). Os sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos no ciclo iterativo são solucionados pelo método direto Decomposição LU. Na obtenção do vetor de força interna, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido a partir da determinação da deformação específica e do dano em cada camada de divisão da seção transversal do elemento.

Problemas de estruturas de pórticos encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência dos algoritmos implementados quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio com pontos limites de força. Além disso, o desempenho computacional do método de Chebyshev é avaliado com base nos parâmetros: número total de incrementos de força (NP), número total de iterações (k_i), e tempo de processamento. As simulações são realizadas com o *software* Matlab. Os resultados numéricos mostram que a solução do problema é alcançada pelo método de Chebyshev com um número menor de passos de força e iterações necessárias até a convergência para a solução, se comparado ao método clássico de Newton-Raphson.

Elemento finito de pórtico

Na formulação de Elementos Finitos considerando a não linearidade geométrica, a matriz de rigidez do elemento de pórtico (\mathbf{K}_{el}) com seis graus de liberdade é dada pela seguinte expressão escrita no sistema de coordenadas locais (CARVALHO, 2010):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (1)$$

na qual \mathbf{K}_E é a matriz de rigidez que contabiliza a parcela de energia de deformação elástica devida à flexão dada por:

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_0^3} & \frac{6EI}{L_0^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_0^3} & \frac{6EI}{L_0^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_0^2} & \frac{4EI}{L_0} & 0 & -\frac{6EI}{L_0^2} & \frac{2EI}{L_0} \\ -\frac{EA}{L_0} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_0^3} & -\frac{6EI}{L_0^2} & 0 & \frac{12EI}{L_0^3} & -\frac{6EI}{L_0^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_0^2} & \frac{2EI}{L_0} & 0 & -\frac{6EI}{L_0^2} & \frac{4EI}{L_0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

e \mathbf{K}_G é a matriz de rigidez geométrica representada por:

$$\mathbf{K}_G = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L_0} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L_0} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L_0}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{L_0}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L_0} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L_0} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L_0}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L_0}{15} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nessas matrizes, L_0 é o comprimento indeformado, I é o momento de inércia, A é a área da seção transversal, N é a força normal, e E é o módulo de elasticidade longitudinal para o material danificado descrito pela seguinte equação:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(1 - d), \quad (4)$$

em que E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal para o material íntegro (não danificado), e $d \in [0,1]$ é a variável dano. O vetor de força interna elementar (\mathbf{F}_{el}) é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{L_0}{2} d\xi, \quad (5)$$

na qual \mathbf{B} é a matriz de deformação-deslocamento, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações, e \mathbf{D} é a matriz constitutiva dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}. \quad (6)$$

No sistema de coordenadas globais, a matriz de rigidez (\mathbf{K}_e) e o vetor de força interna (\mathbf{F}_e) elementares são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{el} \mathbf{T}, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{T} \mathbf{F}_{el}, \quad (8)$$

A matriz de rotação \mathbf{T} é representada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{L_0} & \frac{dy}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dy}{L_0} & \frac{dx}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{dx}{L_0} & \frac{dy}{L_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dy}{L_0} & \frac{dx}{L_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dy}{L_0} & -\frac{dx}{L_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Na Equação (9), dx e dy são as diferenças entre as coordenadas nos nós referentes às configurações do elemento finito deformado e indeformado (inicial). A cada iteração k as coordenadas nos nós são atualizadas.

Modelo constitutivo do material

Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressada por:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (10)$$

O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 e ao módulo de elasticidade E_0 da seguinte forma:

$$r_0 = \frac{f_0}{\sqrt{E_0}}. \quad (11)$$

Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \quad (12)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano r é avaliado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento, tal que:

$$\mathbf{r} = \text{máx}(r_0, \tau). \quad (13)$$

Com a combinação das Equações (10) e (12), a variável τ é obtida em termos da deformação específica $\boldsymbol{\varepsilon}$ por:

$$\tau(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{E_0} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (14)$$

A variável de dano d é escrita em função do limite de dano por:

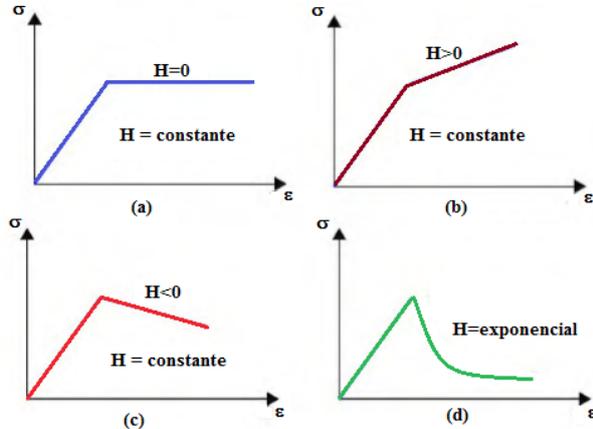
$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (15)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H na Eq. (15), tem-se na Figura 1 os seguintes comportamentos constitutivos: (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); (b) o encruamento linear positivo (endurecimento); (c) o encruamento linear negativo (abrandamento); e (d) o abrandamento exponencial.

A tensão normal (σ) é avaliada da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - d)E_0\varepsilon \quad (16)$$

Figura 1 - Comportamentos constitutivos em função do módulo H.



Fonte: Pedrini (2008).

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k pode ser obtido a partir da deformação específica (ε) avaliada em cada camada de divisão i da seção transversal da viga (no ponto de Gauss correspondente na integração numérica), por meio do algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão mostrado a seguir (Algoritmo 1).

Algoritmo 1: Modelo de Dano

- 1) Calcular $\tau^{(k)} = \sqrt{E_0} |\varepsilon^{(k-1)}|$
- 2) Se $\varepsilon^{(k-1)} > 0$ (tração)
 - Se $\tau^{(k)} > r_{0t}$
 - $r^{(k)} = \tau^{(k)}$
 - senão
 - $r^{(k)} = r_{0t}$
 - Fim
- Calcular $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0t}}{r^{(k)}(1 + H_t)}$
- Fim

- 3) Se $\varepsilon^{(k-1)} < 0$ (compressão)

- Se $\tau^{(k)} > r_{0c}$
- $r^{(k)} = \tau^{(k)}$
- senão
- $r^{(k)} = r_{0c}$
- Fim
- Calcular $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0c}}{r^{(k)}(1 + H_c)}$
- Fim

- 4) Se $\varepsilon^{(k-1)} = 0$, $d^{(k)} = 0$, Fim
- 5) Se $d^{(k)} > 1$, $d^{(k)} = 1$, Fim
- 6) Se $d^{(k)} < 0$, $d^{(k)} = 0$, Fim

Os limites de dano inicial r_{0c} e r_{0t} são referentes à compressão e à tração, respectivamente, e os módulos H_c e H_t referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

Módulo de rigidez à flexão equivalente

Para a determinação do módulo de rigidez à flexão equivalente (EI), a seção transversal do elemento estrutural (viga ou coluna) é dividida em n_c camadas de mesma espessura, conforme o desenho esquemático na Figura 2. O momento de inércia da camada i (I_i) é calculado, de acordo com o Teorema do Eixo Paralelo, por (SOUZA, 2013):

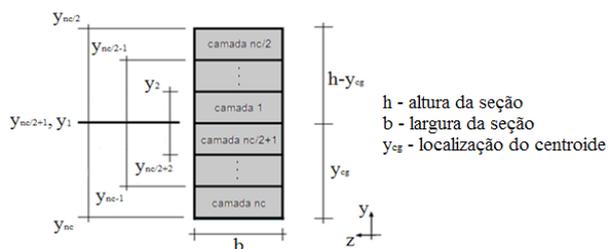
$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1})\left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2}\right)^2, \quad (17)$$

$i = 1, \dots, n_c$

Na Equação (17) b é a largura da seção transversal retangular, e y_i é a coordenada da i -ésima camada a partir do centroide da seção. A rigidez EI é avaliada por:

$$EI = \sum_{i=1}^{n_c} E_i I_i = E_0 \sum_{i=1}^{n_c} (1 - d_i) I_i. \quad (18)$$

Na obtenção do vetor de força interna, o módulo de rigidez à flexão equivalente é avaliado em cada ponto de Gauss na integração numérica (método de Quadratura Gaussiana). No procedimento de cálculo desse módulo, supõe-se que a linha neutra esteja localizada no centroide da seção transversal. A danificação da camada i da seção transversal inicia ($d_i > 0$) quando o valor de τ , avaliado segundo a Eq. (14), atinge o valor do limite de dano inicial r_0 obtido da Eq. (11) (ver Algoritmo 1).



Método de solução não linear

A equação que governa o equilíbrio estático do sistema estrutural pode ser escrita por (MAXIMIANO, 2012):

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}), \quad (19)$$

em que \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradoras, \mathbf{F}_i é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} nos pontos nodais da estrutura), e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A estimativa para o deslocamento residual $\delta\mathbf{u}$ é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u} = \mathbf{g}), \quad (20)$$

na qual \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural no referencial global. Conforme Crisfield (1991), os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas componentes:

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_r, \quad (21)$$

em que $\delta\lambda$ é o subincremento de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo; e $\delta\mathbf{u}_g$ e $\delta\mathbf{u}_r$ são obtidos por, respectivamente:

$$\delta\mathbf{u}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}, \quad (22)$$

$$\delta\mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (23)$$

O parâmetro de força total λ é atualizado no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k por:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}. \quad (24)$$

A determinação do subincremento de força iterativo ($\delta\lambda^{(k)}$) é função da estratégia de iteração ou da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não linear. O problema estrutural dado pela Eq. (20)

é avaliado de forma incremental e iterativo, ou seja, para uma sequência de incrementos do parâmetro de força λ é determinada uma sequência de incrementos de deslocamentos nodais \mathbf{u} .

Técnica de continuação

A técnica de continuação Deslocamento Generalizado (GDCM) foi apresentada por Yang e Shieh (1990), e consiste na utilização de um parâmetro geral de rigidez (GSP) definido pela seguinte equação (RODRIGUES et al., 2008):

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}, \quad (25)$$

sendo ${}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ o vetor de deslocamentos da primeira iteração referente ao primeiro passo de força, ${}^t\delta\mathbf{u}_r$ vetor de deslocamentos do passo de força anterior, e ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ vetor de deslocamentos da primeira iteração do passo de força corrente. Para a iteração $k > 1$, o subincremento de força $\delta\lambda^{(k)}$ no passo $t+\Delta t$ é calculado por:

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}. \quad (26)$$

Há possibilidade de que o deslocamento tangente tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo $\delta\mathbf{u}_{\text{máx}}$, de forma que se $\|\delta\mathbf{u}\| > \delta\mathbf{u}_{\text{máx}}$ então (KRENK, 1995):

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \frac{\delta\mathbf{u}_{\text{máx}}}{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|} \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (27)$$

Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle iteração é a determinação automática da variação do subincremento de força inicial ($\delta\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final do passo de força correspondente, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo (N_{otim}).

Por meio dessa monitoração, o parâmetro de força inicial é determinado da seguinte forma no passo $t+\Delta t$ (RAMM, 1981; CRISFIELD, 1991):

$$\delta\lambda^{(1)} = \pm \sqrt{\frac{N_{otim}}{N_{it}}} \delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|}. \quad (28)$$

Com o objetivo de limitar os processos iterativos, dois critérios de convergência são estabelecidos: um referente aos deslocamentos e o outro às forças.

O critério de convergência para os deslocamentos deve obedecer a seguinte desigualdade:

$$\frac{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\mathbf{u}^{(k)}\|} < \zeta, \quad (29)$$

em que o numerador é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamento, e o denominador é a norma euclidiana do vetor de deslocamento total, referentes a k -ésima iteração.

O critério de convergência para forças deve obedecer à relação:

$$\|\mathbf{g}^{(k)}\| < \zeta. \quad (30)$$

Método iterativo de Chebyshev

Os métodos iterativos da família Chebyshev - Halley são descritos pelas equações (STEIHAUG; SULEIMAN, 2013):

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{y}^{(k)}, \quad (31)$$

$$\delta\mathbf{y}^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(k-1)}) (1 - \gamma \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(k-1)}))^{-1} \delta\mathbf{u}^{(k)}, \quad (32)$$

em que $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}$, γ é um parâmetro real, e \mathbf{I} é a matriz identidade. Neste trabalho, a matriz \mathbf{L} é aproximada por:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})^{-1} \frac{[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(0)})]}{2}. \quad (33)$$

Fazendo $\gamma = 0$ na Eq. (32), obtém-se o método de Chebyshev (HERNANDEZ; GUTIERREZ, 1997):

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (34)$$

No método de Chebyshev são necessárias mais operações do que no método de Newton-Raphson. No entanto, a taxa de convergência do método de

Chebyshev é cúbica, ao passo que o método de Newton converge quadraticamente. Assim, o maior esforço necessário para cada etapa do método de Chebyshev pode ser compensado se menos iterações são necessárias para obter a precisão desejada. O algoritmo para o método de Chebyshev associado à estratégia de continuação GDCM é apresentado a seguir.

Algoritmo 2: Método de Chebyshev associado à técnica GDCM

1) Para a iteração $k = 1$

1.1) Calcular a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(0)}$

1.2) Calcular $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)-1} \mathbf{F}_r$

1.3) Para o primeiro passo de força ($n = 1$): $\delta\lambda^{(1)} = {}^{(1)}\delta\lambda^{(1)}$ e $GSP = 1$.

1.4) Para os demais passos de força ($n > 1$):

$$GSP = \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}$$

$$\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{otim}}{N_{it}}} \delta\lambda^{(1)}$$

Se $GSP < 0$, multiplicar $\delta\lambda^{(1)}$ por -1 para mudar o sentido de crescimento do parâmetro de força

1.5) Calcular a correção do vetor deslocamento

$$\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\lambda^{(1)} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}$$

2) Para a iteração $k > 1$

2.1) Calcular o vetor de força interna $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$

2.2) Calcular a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k-1)}$

2.3) Calcular o vetor de força residual $\mathbf{g}^{(k)}$

2.4) Calcular

$$\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{F}_r$$

2.5) Calcular

$$\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{g}^{(k)}$$

2.6) Calcular a correção do parâmetro de força:

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$$

2.7) Calcular a correção do vetor deslocamento:

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}$$

2.8) Se $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > \delta u_{m\acute{a}x}$, então $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \frac{\delta u_{m\acute{a}x}}{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|} \delta\mathbf{u}^{(k)}$

2.9) Calcular $\mathbf{L}^{(0)} = \frac{\mathbf{K}^{(k-1)-1} (\mathbf{K}^{(0)} + \mathbf{K}^{(k-1)})}{2}$

2.10) $\delta\mathbf{y}^{(k)} = 1/2 \mathbf{L}^{(0)} \delta\mathbf{u}^{(k)}$

2.11) Atualizar os parâmetros totais:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{y}^{(k)}$$

2.12) Repetir os passos 2.1 a 2.11 até que

$$\|\mathbf{g}^{(k)}\| < \zeta \text{ ou } \frac{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\mathbf{u}^{(k)}\|} < \zeta$$

No processo incremental e iterativo de Newton-Raphson (NR), os passos 2.9 e 2.10 do Algoritmo 2 não são executados, ou seja, a parcela $\delta y^{(k)}$ não é avaliada e o deslocamento total no passo 2.11 é atualizado por:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (35)$$

Simulações numéricas

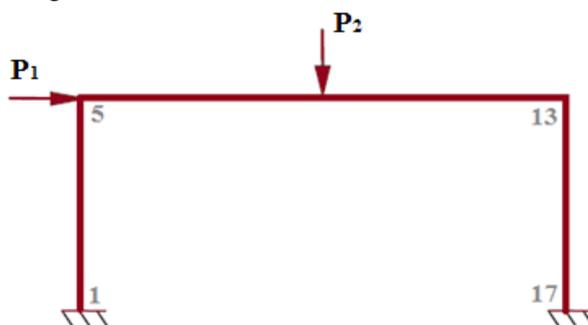
Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de pórticos planos com não linearidade geométrica ou física encontrados na literatura, obtidos com os métodos iterativos de Chebyshev e Newton-Raphson (NR). Em todas as simulações, considerou-se o número de iterações desejadas (N_{oitim}) igual a 5. O peso próprio das estruturas é desprezado nas simulações.

Pórtico com não linearidade física

Seja o problema de um pórtico simples biengastado com 6,0 m de largura e 3,0 m de altura e sujeito às forças concentradas P_1 e P_2 , segundo o desenho esquemático apresentado na Figura 3. A viga do pórtico tem seção transversal retangular ($0,30 \times 0,40$) m² e os pilares seção transversal quadrada ($0,30 \times 0,30$) m². O material que constitui os elementos estruturais apresenta comportamento perfeitamente plástico (Figura 1a). Este problema foi estudado por Lourenço (1999). Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros considerados no Modelo de Dano e na estratégia de continuação GDCM.

As seções transversais dos elementos estruturais foram divididas em 20 camadas de mesma espessura. Na discretização por elementos finitos foram utilizados 16 elementos finitos de pórtico, sendo quatro elementos para cada pilar e oito para a viga. As trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal nó 5 *versus* fator de força λ) obtidas com os métodos de solução de Chebyshev e de NR são apresentadas na Figura 4.

Figura 3 - Modelo estrutural do pórtico simples biengastado.



Fonte: o próprio autor.

Tabela 1 - Parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM.

Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 200,0$ GPa	${}^1\delta\lambda^{(1)} = 0,903$
$f_{oc} = f_{ot} = 200,0$ MPa	$\Delta P_1 = 100,0$ kN
$H_c = H_t = 0$	$\Delta P_2 = 150,0$ kN
	$\delta u_{\text{máx}} = 0,01$
	$\zeta = 1,0 \times 10^{-4}$

Fonte: o próprio autor.

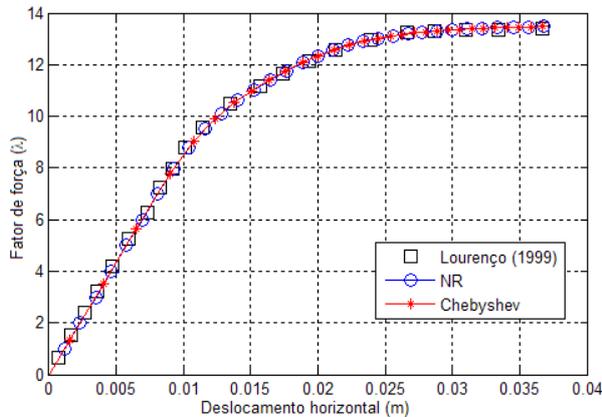
Observa-se, na Figura 4, que as curvas obtidas com os algoritmos implementados aproximaram-se da obtida por Lourenço (1999), validando os mesmos quanto à análise não linear física. O fator de força (λ) correspondente ao limite de elasticidade da estrutura obtido nas simulações foi igual a 6,61407 para ambos os métodos, com um erro relativo percentual de 0,05938 % se comparado ao fator teórico ($\lambda = 6,618$). Na Tabela 2 são apresentados os valores para os números totais de passos de força (NP) e de iterações acumuladas (k_i) e o tempo de processamento (em segundos), obtidos das simulações com os métodos implementados.

Tabela 2 - Resultados numéricos.

Método numérico	NP	k_i	Tempo (s)
NR	47	578	5,736454
Chebyshev	30	327	3,262929

Fonte: o próprio autor.

Figura 4 - Trajetórias de equilíbrio.

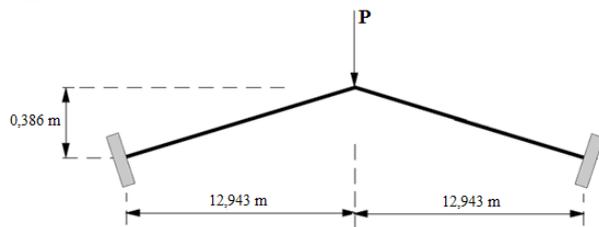


Fonte: o próprio autor.

Pórtico com não linearidade geométrica

Para verificar a teoria de não linearidade geométrica implementada neste artigo, considere o pórtico constituído por duas barras de igual comprimento rigidamente interligadas, com apoios nas extremidades que impedem as translações e rotações no seu plano, conforme é mostrado na Figura 5. Esse pórtico foi estudado por Willians (1964).

Figura 5 - Modelo estrutural do pórtico de Willians.



Fonte: o próprio autor.

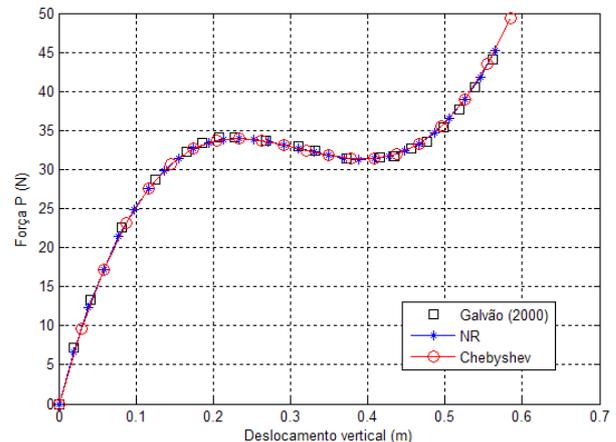
As barras possuem os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade longitudinal $E_0 = 1,03 \times 10^7$ Pa e área da seção transversal retangular $A = (0,253 \times 0,753)$ m². Supõe-se que o material tenha comportamento elástico linear. Para a simulação com a estratégia de continuação GDCM foi adotado o subincremento de força inicial ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 3,2$, o incremento de força $\Delta P = 2,0$ N, $\delta u_{\text{máx}} = 0,05$, e a tolerância $\zeta = 1,0 \times 10^{-5}$.

Devido à simetria quanto ao carregamento e geometria, foi discretizada apenas metade da estrutura. A malha consiste de 16 elementos finitos de pórtico e 17 nós.

Na Figura 6 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no ponto de aplicação da força *versus* força P) obtidas com os métodos de solução de NR e de Chebyshev. Observa-se, nessa figura, que as respostas preditas pelos algoritmos implementados obtiveram boa concordância com a solução obtida por Galvão (2000), apresentando dois pontos limites de força na trajetória. Pontos limites de força são pontos extremos (pontos de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio, em que a tangente é horizontal.

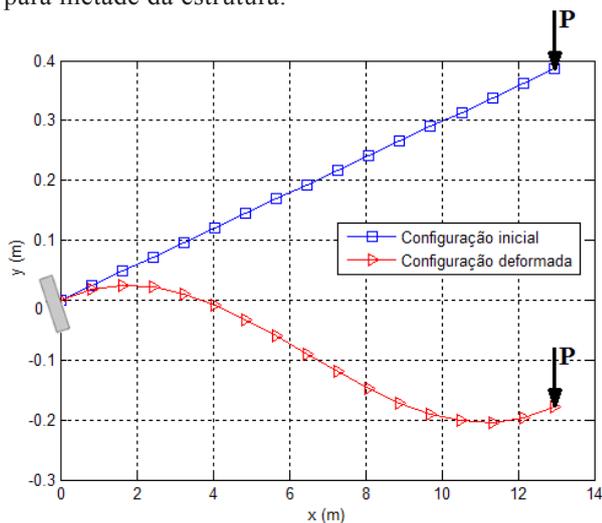
Na Figura 7 é apresentada metade da estrutura do pórtico nas suas configurações indeformada (posição inicial) e deformada (posição final). Na Tabela 3 aparecem os resultados numéricos (NP, k_t e tempo de processamento) das simulações.

Figura 6 - Trajetórias de equilíbrio.



Fonte: o próprio autor.

Figura 7 - Configurações indeformada e deformada para metade da estrutura.



Fonte: o próprio autor.

Tabela 3 - Resultados numéricos.

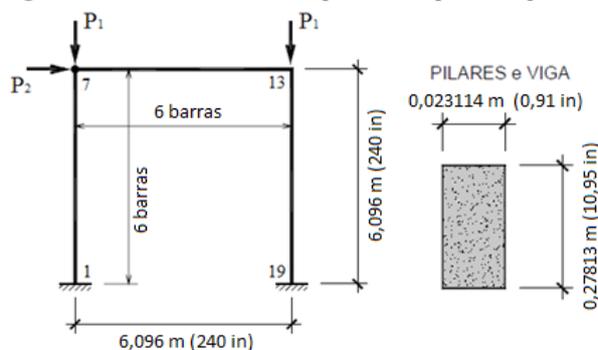
Método numérico	NP	k_t	Tempo (s)
NR	29	152	0,260274
Chebyshev	20	130	0,253737

Fonte: o próprio autor.

Pórtico com não linearidade geométrica e física

Seja o pórtico simples biengastado, proposto por Elias (1986), sujeito às forças concentradas $P_1 = 1,556877 \times 10^3$ kN (350,0 kip) e $P_2 = 4,44822$ kN (1,0 kip), conforme é mostrado na Figura 8. Este exemplo numérico foi estudado por Branco (2002) e Corelhano (2010). As seções transversais dos elementos estruturais foram divididas em 20 camadas de mesma espessura. Na discretização da estrutura foram utilizados 18 elementos finitos de pórtico (seis elementos para cada pilar e seis para a viga).

Figura 8 - Modelo estrutural do pórtico simples biengastado.



Fonte: adaptada do Branco (2002)

Na Figura 9 são apresentadas as curvas deslocamento horizontal no nó 7 versus força P_1 para as análises com os métodos de NR e de Chebyshev considerando a não linearidade geométrica (NLG) e as não linearidades geométrica e física (NLGF). Supõe-se que o material tenha comportamento elastoplástico com encruamento positivo (Figura 1b) variando-se o valor de H . Os parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM são apresentados Tabela 4.

Tabela 4 - Parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM.

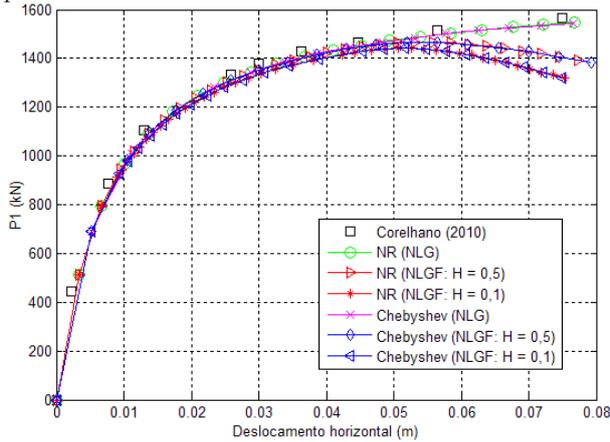
Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 206,8427$ GPa ($3,0 \times 10^4$ ksi)	${}^1\delta\lambda^{(1)} = 4,0$
$f_{oc} = f_{ot} = 137,8951$ MPa (20,0 ksi)	$\Delta P_1 = 155,6877$ kN
$H = 0,1$ ou $0,5$	$\Delta P_2 = 0,4448$ kN
	$\delta u_{\max} = 0,45$
	$\zeta = 1,0 \times 10^{-4}$

Fonte: o próprio autor.

Vê-se na Figura 9 que os resultados numéricos obtidos com o programa desenvolvido se aproximaram dos obtidos por Corelhano (2010) quanto à análise NLG. Quando se supõe que o material tenha comportamento elastoplástico, observa-se que a rigidez da estrutura diminui em função do processo evolutivo de microfissuração ($d > 0$), aparecendo nas trajetórias de equilíbrio um ponto limite de força. A força de colapso de um sistema estrutural pode ser significativamente alterada quando se introduzem na análise mais de um efeito não linear. Na Tabela 5 são apresentados os resultados numéricos para as análises considerando a NLG,

e nas Tabelas 6 e 7 as análises com NLGF supondo $H = 0,5$ e $H = 0,1$, respectivamente.

Figura 9 - Curvas deslocamento horizontal *versus* força para as análises NLG e NLGF.



Fonte: o próprio autor.

Tabela 5 - Resultados numéricos (NLG).

Método numérico	NP	k_t	Tempo (s)
NR	19	103	1,182298
Chebyshev	15	114	1,811370

Fonte: o próprio autor.

Tabela 6 - Resultados numéricos (NLGF - $H_c = H_t = 0,5$).

Método numérico	NP	k_t	Tempo (s)
NR	30	380	17,551341
Chebyshev	18	172	8,583506

Fonte: o próprio autor.

Tabela 7 - Resultados numéricos (NLGF - $H_c = H_t = 0,1$).

Método numérico	NP	k_t	Tempo (s)
NR	42	1032	50,633312
Chebyshev	25	492	25,904728

Fonte: o próprio autor.

Análise dos resultados

Os métodos da classe Chebyshev-Halley são muito atrativos para resolver problemas não lineares por terem taxa de convergência cúbica, entretanto são computacionalmente caros por dois motivos: a necessidade de se obter a matriz L a cada iteração; e resolver de forma exata dois sistemas lineares - cálculo

de δu e δy nas Eqs. (31) e (32), respectivamente.

Apesar da iteração do método de Chebyshev ter um custo computacional maior em comparação com a do método de NR, os tempos de processamento obtidos das simulações foram inferiores com aquele método, exceto para a simulação considerando a NLG no último problema. A diminuição dos tempos é explicada pela solução dos problemas ser alcançada com um número menor de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a tolerância requerida, visto que menos resoluções de sistemas de equações lineares (gerados da formulação de Elementos Finitos a cada iteração) e menos atualizações da matriz de rigidez K e do vetor de força interna F_i são necessárias ao longo do processo.

Nota-se que na iteração do método de Chebyshev é utilizada a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU ou fatoração de Cholesky), uma vez que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

Com a aproximação proposta neste trabalho para a matriz L , as análises não lineares com o método de Chebyshev mostraram-se promissoras. O cálculo dessa matriz é relativamente simples, e envolve a matriz de rigidez computada no início do passo de força ($K^{(0)}$) e a matriz de rigidez corrente computada no ciclo iterativo ($K^{(k)}$), além da determinação da inversa dessa matriz. Observa-se, no entanto, que não há necessidade de se calcular essa inversa - pode-se, por exemplo, utilizar a última decomposição LU da matriz $K^{(k)}$ que não se altera na iteração k .

A matriz de rigidez do sistema estrutural K é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Melhor eficiência numérica da metodologia proposta pode ser obtida por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz, e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes envolvendo elementos nulos.

Conclusões

A partir dos exemplos numéricos de pórticos planos estudados, destaca-se a boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura no que tange à obtenção das trajetórias de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido. A consideração dos efeitos das não linearidades física e geométrica na análise pode afetar significativamente o comportamento pré-crítico e a capacidade de carga da estrutura.

A crescente simulação de modelos estruturais complexos, por meio do MEF, tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resolução do problema estrutural. Observa-se um melhor desempenho computacional com o procedimento incremental e iterativo baseado no método de Chebyshev em comparação com o método clássico de Newton-Raphson. O custo computacional para a resolução dos sistemas de equações lineares gerados da discretização pelo MEF a cada iteração costuma a ser, em geral, o mais dispendioso durante o processo. Sendo assim, com a redução significativa de passos de forças e iterações até a convergência para a solução, o tempo de processamento para se obter a resposta da análise estrutural pode diminuir.

A técnica de Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM) mostrou-se eficiente na obtenção das trajetórias de equilíbrio em que apresentaram pontos limites de força. O parâmetro geral de rigidez (GSP) utilizado para a verificação da mudança do sinal do incremento de força na passagem por pontos limites forneceu resultados com razoável precisão.

Uma barreira no uso corrente de modelos não lineares está relacionada aos problemas numéricos e instabilidades na convergência que podem surgir em virtude de diversos refinamentos de modelo. Isso ocorre por conta da calibração dos parâmetros necessários nesses modelos, sendo oneroso o processo, visto que

diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura.

Deve-se ressaltar que os problemas de pórticos estudados são de pequena escala no contexto computacional atual, pois possuem menos de 100 graus de liberdade. Em vista disso, análises numéricas de problemas com número maior de graus de liberdade são indispensáveis, a fim de se verificar o desempenho computacional do algoritmo proposto com o método de Chebyshev.

Além disso, sugere-se para desenvolvimentos futuros: a implementação de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento; aplicar outros métodos iterativos para a solução não linear do problema estrutural, como os métodos de Potra-Pták, do Ponto Médio e de Chun; e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica. Em adição, a determinação da rigidez à flexão equivalente com a divisão da seção transversal em camadas permite realizar simulações de problemas de pórticos com elementos estruturais compostos por mais de um tipo de material e com diferentes comportamentos constitutivos; por exemplo, vigas e pilares de concreto armado reforçados com camadas de PRFC.

Referências

- BRANCO, A. L. L. V. *Análise não linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos*. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARVALHO, M. F. M. S. *Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos*. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- CORELHANO, A. G. B. *Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado*. 2010. Dissertação (Mestrado em

- Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1: Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- ELIAS, Z. M. *Theory and Methods of Structural Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- GALVÃO, A. S. *Formulações não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós - Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- HERNANDEZ, M. A.; GUTIERREZ, J. M. A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces. *Bulletin - Australian Mathematical Society*, v. 55, n. p. 113-130, 1997.
- KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *Int. J. Numer. Methods Eng.* v. 38, p. 823-839, 1995.
- LOURENÇO, P. B. *Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear*. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.
- MANZOLI, O. L. *Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos*. 1998. Tese (Doutorado) - Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- MAXIMIANO, D. P. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. M. Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: *Mecânica Computacional*, v. XXXI, 2012, Salta. *Anais...* Salta: Mecânica Computacional, v. XXXI, 2012.
- PEDRINI, R. A. A. *Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, 2008.
- PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 8, n. 4, p. 351-360, 1992.
- RAMM, E. Strategies for tracing the Non-linear Response Near Limit Points. *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K. -J. (eds), New York, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.
- ROCHA, G. *Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas*. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto.
- RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de estratégias de solução do problema não linear. *Revista de Ciência & Tecnologia*, v. 8, n. 2, p. 36-48, 2008.
- SANTOS, G. F.; SILVA, J. G. S.; SOEIRO, F. J. C. P.; NETO, A. J. S. Identificação de dano e análise de sensibilidade em treliças de aço. In: *MECÂNICA COMPUTACIONAL*, 29., 2010, Buenos Aires. *Anais...* Buenos Aires, 2010.
- SOUZA, E. A. *Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares*. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2015.

SOUZA, L. A. F. Análise estrutural unidimensional de viga de concreto armado reforçada com PRFC. *Ciência & Engenharia*, v. 22, p. 65-72, 2013.

STEIHAUG T.; SULEIMAN, S. Rate of convergence of higher order methods. *Applied Numerical Mathematics*, v. 67, n. 1, p. 230-242, 2013.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. *AIAA Journal*, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

WILLIAMS, F. W. An Approach to the Nolinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, v. 17, n. 4, p. 451-469, 1964.

Recebido em 4 Janeiro, 2016 - Received on January 4, 2016.

Aceito em 29 Maio, 2017 - Accepted on May 29, 2017.