

Soluções da equação de difusão de calor em regime transiente: Aprendendo matemática com diferentes métodos de solução

Transient solutions to the heat diffusion equation: Learning mathematic from different solution methods

Veríssimo Manoel de Aquino¹; Hiromi Iwamoto²; Guilherme Augusto Lisboa Nogueira³;
Ladislau Vieira Teixeira Tavares³

Resumo

Problemas envolvendo a dinâmica de processos de esfriamento ou aquecimento de sistemas físicos são de grande importância em várias situações de interesse tecnológico. Soluções dependentes do tempo da equação de difusão do calor, para uma série de sistemas físicos, apresentam-se na forma de séries infinitas de funções analíticas, o que torna a análise dos vários aspectos da solução uma tarefa não muito fácil. Neste trabalho, soluções transientes da equação de difusão do calor, para um sistema finito, unidimensional e homogêneo, são apresentadas para dois diferentes conjuntos de condições de contorno. A influência das condições de contorno sobre a evolução temporal de processos é explicitada e alguns aspectos das soluções são discutidos. Por comparação de resultados obtidos por diferentes métodos de solução, relações matemáticas não usualmente encontradas na literatura são apresentadas, provadas, ou verificadas com auxílio computacional. A possibilidade de utilização dos resultados obtidos em problemas mais complexos é discutida.

Palavras-chave: Soluções transientes. Difusão do calor. Soluções em séries.

Abstract

Problems involving the dynamics of heating or cooling physical systems submitted to boundary conditions are of great importance in a wide range of technological applications. Transient solutions to the heat diffusion equation, for a series of physical systems, are given by infinity series of analytical functions, which makes the analysis of the various aspects of the solution a not easy task. This work provides solutions to the heat diffusion equation in one-dimensional and homogenous systems when submitted to certain boundary conditions. The influence of the boundary conditions on the temporal evolution of the system is explained and some aspects of the solutions are discussed. By comparison of “apparently” different results obtained by using different mathematical methods, some identities are obtained, proved analytically, or verified using computational help. Also we discuss the possibility to analyze more complex systems by using the present results.

Keywords: Transient solutions. Heat diffusion. Series solutions.

¹ Docente do Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina; verissim@uel.br

² Docente do Departamento de Física da universidade estadual de Londrina; hiromiuel@gmail.com

³ Graduando do curso de Física da Universidade Estadual de Londrina

Introdução

Problemas envolvendo a dinâmica do aquecimento ou resfriamento de sistemas físicos submetidos a certas condições de contorno são de grande importância em um espectro amplo de situações. Desde casos simples como o esfriamento de alimentos (DINCER, 1995), onde a temperatura de cada parte do sistema precisa ser controlada, até situações mais complexas como os reatores nucleares, onde existe uma fonte de calor dependente da posição e a dependência da reatividade do reator com a temperatura requer um bom conhecimento da dinâmica desta quantidade, tanto por questão de eficiência, quanto de segurança (KESSLER, 2009). Soluções para a equação de difusão do calor em regime estacionário, de um modo geral, são fáceis de serem obtidas para uma série de sistemas físicos. Uma vasta literatura com resultados conclusivos para sistemas em uma, duas ou três dimensões, homogêneos ou compostos, pode ser encontrada facilmente. Conhecer a dinâmica do aquecimento de um sistema, desde o início do processo, até a condição de equilíbrio ser estabelecida, no entanto, não é uma tarefa fácil para a maioria dos sistemas analisados. Sistemas unidimensionais idealizados, homogêneos, infinitos ou semi-infinitos, apresentam soluções dependentes do tempo para a equação de difusão, ditas transientes, as quais podem ser encontradas por diferentes métodos de solução. Seja pelo método de mudança para uma variável de similaridade, ou pelo método de Laplace, as soluções apresentam-se na forma de funções analíticas expressas de uma forma “fechada”. Soluções para sistemas unidimensionais compostos pela junção de materiais diferentes e semi-infinitos apresentam esta mesma propriedade. Para sistemas com dimensões finitas, mesmo que homogêneos, as soluções transientes são obtidas na forma de uma soma infinita de funções. Os elementos que compõem estas séries dependem do método utilizado, séries de funções características, no caso da solução via separação de variáveis, ou série de funções erro, quando o método de Laplace é utilizado. Em ambos os casos aspectos interessantes

das soluções não podem ser compreendidos sem a ajuda, por exemplo, de auxílio computacional. Os principais métodos de solução da equação de difusão do calor são abordados nas referências (ARFKEN, 2001; BUTKOV, 1978; CARSLAW, 1959). Soluções em situações em que existem fontes internas ao sistema são geralmente tratadas pelo método de Green (MORSE, 1953). Sistemas finitos compostos apresentam ainda maior complexidade e soluções analíticas em forma de séries de funções características só são possíveis para conjuntos particulares de parâmetros físicos dos sistemas (CARSLAW, 1959; MONTE, 2000). As soluções transientes da equação de difusão do calor, quando o problema é abordado via método de separação de variáveis, são escritas como uma somatória infinita de funções características do sistema, compatíveis com as condições de contorno impostas ao sistema, multiplicadas por certos coeficientes. Tais coeficientes são tais que a solução, quando t tende a zero, converge para a distribuição de temperatura do sistema no instante inicial, condição inicial. Encontrar os coeficientes adequados para dadas condições iniciais é uma tarefa que exige certo cuidado. Soluções não deriváveis em t igual a zero, bem conhecidas em análise de Fourier, são comuns de serem encontradas e sua interpretação precisa ser efetuada.

Conhecer a forma exata da função distribuição inicial $f(x,0)$, a qual deve ser objeto de uma expansão em série de Fourier, também exige atenção e uma certa experiência. Adicionalmente, dependendo do método abordado para a obtenção da solução, ou do ataque ao problema dentro de um mesmo método, soluções aparentemente diferentes são encontradas. Para completeza do entendimento do problema, a demonstração da equivalência entre as soluções é necessária, e isto nos leva a identidades matemáticas interessantes e não encontradas na maioria de livros e tabelas de relações matemáticas. Neste cenário, o estudo da difusão de calor em regime transiente em sistemas unidimensionais, apresenta-se a estudantes de graduação e iniciantes

em atividades de pesquisa, como um ótimo campo para aprendizado de técnicas de solução de equações diferenciais e utilização de apoio computacional na compreensão de resultados. No presente trabalho as soluções transientes da equação de difusão de calor para um sistema homogêneo e unidimensional são apresentadas para diferentes condições iniciais do sistema. A influência das condições de contorno do problema na dinâmica da evolução temporal é analisada. Aspectos interessantes do processo, normalmente não abordados em livros textos, dada a complexidade da análise de soluções quando escritas em forma de séries infinitas, são explicitados via a utilização de apoio computacional. Algumas identidades matemáticas são obtidas, demonstradas, ou verificadas. A extensão para problemas em três dimensões é discutida.

A equação de difusão do calor

A equação de difusão do calor para um sistema com condutividade térmica k , capacidade térmica por unidade de volume c e densidade ρ é dada por:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + \frac{q(\mathbf{r}, t)}{k} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

onde $T(\mathbf{r}, t)$ é a distribuição de temperatura, a^2 é a constante de difusão, $a^2 = k / \rho c$ e $q(\mathbf{r}, t)$ é a taxa na qual calor é criado ou absorvido por unidade de volume. O fluxo de calor por unidade de área, denominado densidade de corrente, é:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -k \nabla T \quad (2)$$

Fluxo de calor unidimensional. Solução pelo método de separação de variáveis

Para um sistema homogêneo e unidimensional com secção reta transversal unitária, trocando calor com o meio externo somente através de seus extremos nas posições $x = 0$ e $x = L$, sem fontes ou sumidouros em seu interior, a equação de difusão escrevesse como:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

Assumindo-se as condições de contorno: $T(x = 0, t) = T_1$ e $T(x = L, t) = T_2 > T_1$ com T_1 e T_2 constantes, e como condição inicial $T(x, 0) = T_1$, a solução independente do tempo, dita estacionária ou de equilíbrio, $T_{eq}(x)$ é facilmente obtida e resulta em:

$$T_{eq}(x) = T_1 + \frac{\Delta T}{L} x; \Delta T = T_2 - T_1 \quad (4)$$

A solução com dependência temporal $T(x, t)$ é escrita como $T(x, t) = T_{eq}(x) + T_{trans}(x, t)$ onde o termo transiente é solução da equação de difusão sem fontes. As funções características do sistema são obtidas tomando-se $T(x, t)$ na forma $T(x, t) = Y(t) * U(x)$. Substituindo-se $T(x, t)$ na equação diferencial e escolhendo a constante de separação real e adequada às condições de contorno obtém-se:

$$\frac{1}{Y(t)} \frac{dY(t)}{dt} = a^2 \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\lambda; \lambda > 0 \quad (5)$$

cujas soluções para $Y(t)$ e $U(x)$ resultam em:

$$Y(t) = e^{-\lambda t}$$

$$U(x) = A \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda}}{a} x + B \cos \sqrt{\lambda} x \quad (6)$$

Das condições de contorno impostas ao sistema a constante B resulta ser B=0 e A obedece a relação:

$$A \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda}}{a} L = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{a} L = n\pi; n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

deste modo, as funções características compatíveis com as condições de contorno são:

$$T_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \quad (8)$$

e a expansão de $T_{trans}(x, t)$ em serie de funções características resulta:

$$T_{trans}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \quad (9)$$

A condição inicial $T(x, 0) = T_1$ determina que os coeficientes A_n são os coeficientes de Fourier da função ímpar de período $2L$

$$f(x) = -\frac{\Delta T}{L} x \quad (10)$$

dados por:

$$A_n = (-1)^n \frac{2\Delta T}{n\pi}; n = 1,3,5, \dots \quad (11)$$

Deste modo, a evolução temporal da temperatura do sistema e a densidade de corrente são dadas pelas expressões:

$$T(x,t) = T_1 + \frac{\Delta T x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Delta T}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \quad (12)$$

$$J = -k \frac{\Delta T}{L} - \frac{2K \Delta T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \quad (13)$$

Para T_1 e T_2 dados, em $t = \infty$, o fluxo de calor H em alguma seção reta transversal do sistema, é dado por:

$$H = -K \frac{\Delta T}{L} \quad (14)$$

Mantendo como condição inicial $T(x, 0) = T_1$ e trocando as condições de contorno para $T(0, t) = T_1$ e a existência de um fluxo de calor constante H dado em (14) penetrando o sistema na posição $x = L$ a partir de t igual a zero, após o equilíbrio ser estabelecido, como não existem fontes internas ao sistema, a solução estacionária será:

$$T_{eq}(x) = T_1 + \frac{\Delta T}{L} x \quad (15)$$

e a densidade de corrente:

$$J_{eq}(x) = -K \frac{d T_{eq}(x)}{dx} = H \quad (16)$$

Tomando $T(x, t) = T_{eq}(x) + T_{trans}(x, t)$ e resolvendo a equação para a solução transiente via método de separação de variáveis, as condições de contorno implicam em que as soluções com dependência na variável x das funções características do sistema,

$$U(x) = A \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} x + B \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{a} x \quad (17)$$

são tais que:

$$T(0, t) = T_1 \rightarrow B = 0;$$

$$-k \frac{1}{a^2} \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = H \rightarrow \quad (18)$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{a} \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{a} L = 0; \frac{\sqrt{\lambda}}{a} L = \frac{n\pi}{2}; n = 1,3,5 \dots$$

Deste modo a expansão de $T_{trans}(x, t)$ em funções características resulta:

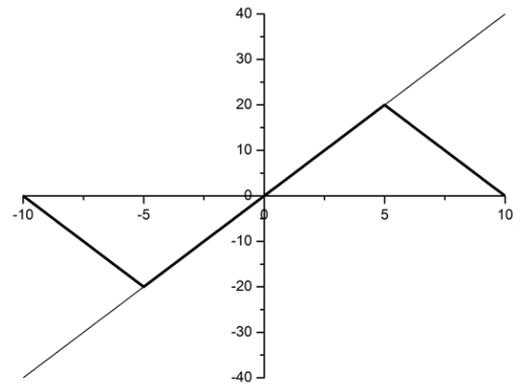
$$T_{trans}(x, t) = \sum_{n=ímpar}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{4L^2} t} \quad (19)$$

onde os A_n são os coeficientes de Fourier da expansão de alguma função ímpar $f(x)$ para $-2L < x < +2L$, tais que:

$$T_{trans}(x, 0) = -f(x) = -\frac{\Delta T}{L} x; 0 < x < L \quad (20)$$

Na figura 1 estão representadas duas funções ímpares que estão em acordo com esta exigência para $L=5$ unidades de comprimento e $\Delta T=20$ unidades de temperatura.

Figura 1. Funções compatíveis com a equação (20). $g(x)$ (tracejada), e $f(x)$ (linha sólida).



Fonte: o próprio autor.

O cálculo dos coeficientes de Fourier da expansão de $g(x)$ mostra que os coeficientes com n pares são diferentes de zero, em completo desacordo com a expansão dada por (19). Para $f(x)$ estes coeficientes resultam:

$$A_n = -\frac{8\Delta T}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad (21)$$

Deste modo as evoluções temporais da temperatura do sistema e da densidade de corrente resultam em:

$$T(x,t) = T_1 + \frac{\Delta T x}{L} - \frac{8\Delta T}{\pi^2} \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{4L^2} t} \quad (22)$$

$$J = -k \frac{\Delta T}{L} + \frac{4K\Delta T}{\pi L} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{4L^2}t} \quad (23)$$

Solução via transformada de Laplace.

Seja $F(x, S)$ a transformada de Laplace da função $T(x, t)$

$$F(x, S) = \mathcal{L}\{T(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-St} T(x, t) dt ; Re_S > 0 \quad (24)$$

Para o primeiro conjunto de condições de contorno e iniciais analisado anteriormente, $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$ e $T(x, 0) = T_1$ a transformada de Laplace da equação de difusão (3) é escrita como:

$$S F(x, S) - a^2 \frac{\partial^2 F(x, S)}{\partial x^2} = T_1 \quad (25)$$

e as condições de contorno sobre $F(x, S)$ são:

$$F(0, S) = \frac{T_1}{S} ; F(L, S) = \frac{T_2}{S} \quad (26)$$

Tomando $F(x, S) = \frac{T_1}{S} + G(x, S)$

$$G(x, S) = \frac{a^2}{S} \frac{\partial^2 G(x, S)}{\partial x^2} \quad (27)$$

a qual tem como solução $G(x, S) = g(S) \left[A e^{\frac{\sqrt{S}}{a}x} + B e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}x} \right]$. As condições de contorno sobre $F(x, S)$ implicam em que:

$$A = -B ; g(S) = \frac{\Delta T}{A \left[e^{\frac{\sqrt{S}}{a}L} - e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}L} \right]} \quad (28)$$

Finalmente $F(x, S)$ é dada por:

$$F(x, S) = \frac{T_1}{S} + \frac{\Delta T}{S} \frac{\sinh \frac{\sqrt{S}}{a} x}{\sinh \frac{\sqrt{S}}{a} L} \quad (29)$$

Calculando a transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(x, S)\}$, usando a integral de inversão de Mellin sobre um contorno apropriado (CARSLAW, 1959), e o teorema de resíduos, ou consultando uma tabela de transformadas de Laplace, a temperatura do sistema resulta:

$$T(x, t) = T_1 + \frac{\Delta T x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Delta T}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} \quad (30)$$

A transformada de Laplace $F(x, S)$ pode ser obtida diretamente de $T(x, t)$ dada em (22)

$$\mathcal{L}\{T(x, t)\} = \mathcal{L}\{T_1\} + \mathcal{L}\left\{\frac{\Delta T x}{L}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Delta T}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathcal{L}\left\{e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\right\} \quad (31)$$

e resulta:

$$F(x, S) = \frac{T_1}{S} + \frac{\Delta T x}{SL} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Delta T}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{1}{S + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}} \quad (32)$$

Pode-se, ainda, calcular-se $T(x, t)$ de $F(x, S)$ por um caminho diferente. Escrevendo $F(x, S)$ de (29) como:

$$F(x, S) = \frac{T_1}{S} + \frac{\Delta T}{S} \frac{\left(e^{\frac{\sqrt{S}}{a}x} - e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}x} \right)}{1 - e^{-\frac{2\sqrt{S}}{a}L}} e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}L} \quad (33)$$

Expandindo $\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\sqrt{S}}{a}L}}$ em potências de $e^{-\frac{2\sqrt{S}}{a}L}$ obtém-se

$$F(x, S) = \frac{T_1}{S} + \frac{\Delta T}{S} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}[-x+(2n+1)L]} - e^{-\frac{\sqrt{S}}{a}[x+(2n+1)L]} \right\} \quad (34)$$

Usando (GRADSTEIN, 1980)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-k\sqrt{S}}}{S}\right\} = \text{erfc}\left\{\frac{k}{2\sqrt{t}}\right\} \quad (35)$$

onde o símbolo erfc refere-se à função erro complementar. A temperatura $T(x, t)$ e o gradiente de $T(x, t)$ são dados por:

$$T(x, t) = T_1 + 2 \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{(2n+1)L+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{(2n+1)L-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right\} \quad (36)$$

$$\nabla T(x, t) = \frac{\Delta T}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{[(2n+1)L+x]^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{[(2n+1)L-x]^2}{4a^2 t}} \right\} \quad (37)$$

Análise dos resultados

Vários aspectos interessantes podem ser enfatizados a partir da análise dos cálculos precedentes. Primeiramente, para valores de T_1 e T_2 dados e com a condição inicial $T(x, 0) = T_1$, as distribuições estacionárias de temperatura do sistema são as mesmas para os dois conjuntos de condições de contorno impostos ao sistema: (a) $T(0, t) = T_1$, ; $T(L, t) = T_2$, e (b) $T(0, t) = T_1$

e, a existência de um fluxo de calor constante H penetrando o sistema na posição $x=L$ a partir de t igual a zero. A evolução das distribuições de temperatura do sistema é, no entanto, diferente, fato devido às diferentes condições de contorno impostas ao sistema. Adicionalmente, os tempos característicos associados a cada caso, são também distintos, $\tau_a = \frac{L^2}{\pi^2 a^2}$ e $\tau_b = \frac{4L^2}{\pi^2 a^2}$, o que determina uma “velocidade” diferente com que o sistema tende para a solução estacionária nos dois casos. Na figura 2 são apresentadas as distribuições de temperatura do sistema para os dois casos considerados nos instantes $t = \frac{\tau_a}{4}$, τ_a e $3\tau_a$.

A segunda questão refere-se às series correspondentes às densidades de corrente, no caso (b), J_b , dada pela expressão (23), converge para $0 \leq t \leq \infty$. Diferentemente, a série correspondente a J_a , dada em (13), notadamente é não convergente para $t = 0$. O problema de obterem-se séries cujas derivadas não convergem é conhecido em análise de Fourier e existem maneiras de contorná-los (ARFKEN, 2001), este não é o caso em questão. A presença da exponencial negativa nos coeficientes $A_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2}{\tau_a} t}$, para $t > 0$ torna a série convergente. Nas figuras [3] são apresentadas as distribuições de correntes do sistema nos dois casos considerados para $t = \frac{\tau_a}{4}$, τ_a e $3\tau_a$. Os grandes valores de J_a para posições próximas a $x=L$, quando t se aproxima de zero, reflete o grande valor do gradiente da temperatura nesta posição.

Um aspecto interessante da evolução temporal do sistema é dado pelo comportamento da taxa de variação da temperatura com o tempo, $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$. Para o conjunto de condições de contorno (a) esta distribuição esta apresentada na figura [4] para alguns valores de t . Pode-se observar que a distribuição propaga-se através do meio como um pulso de onda amortecida. Todas as figuras apresentadas correspondem aos valores dos parâmetros físicos do sistema $L=5$ unidades de comprimento, $T_1 = 10$ unidades de temperatura e $\Delta T = 20$.

Outros aspectos interessantes, de interesse matemático, precisam ainda ser considerados. Os resultados “aparentemente” distintos, obtidos por caminhos diferentes para o cálculo de $F(x,S)$, dados em (29) e (32), leva-nos à identidade:

$$\frac{\Delta T}{S} \frac{\sinh \frac{\sqrt{S}}{a} x}{\sinh \frac{\sqrt{S}}{a} L} = \frac{\Delta T x}{SL} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\Delta T}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{1}{S + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2}} \quad (38)$$

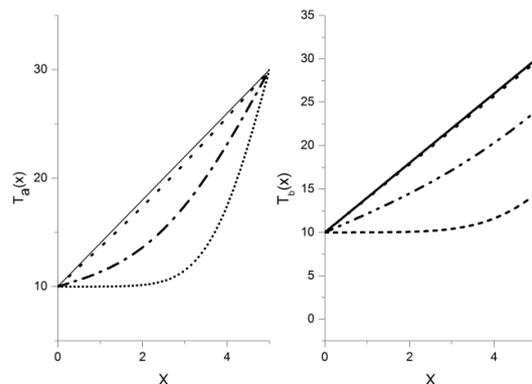
A verificação desta igualdade está apresentada no apêndice [A].

Das expressões (12) e (36) uma segunda identidade é obtida:

$$\frac{1}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{(2n+1)L+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{(2n+1)L-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right\} \quad (39)$$

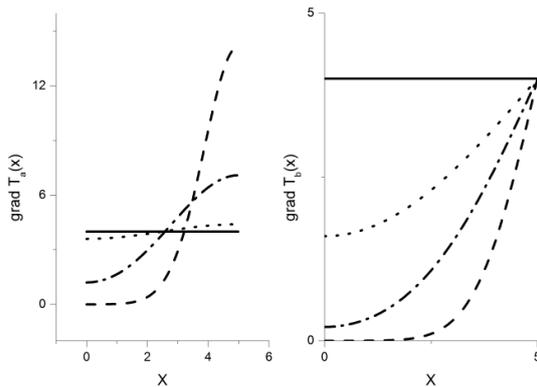
A consistência da solução dada em (12) com as condições iniciais impostas é fácil de ser verificada. Tal não é o caso da solução dada por (36) e esta tarefa consiste em um exercício interessante de matemática que está desenvolvido no apêndice B. A igualdade (39) não pode ser demonstrada por um caminho simples e sua validade pode ser verificada graficamente. Na figura 5 o gradiente destas expressões, (13) e (37), estão apresentados.

Figura 2. Distribuições de Temperatura $T_a(x,t)$ e $T_b(x,t)$ para $t = \frac{\tau_a}{4}$ (traço curto), τ_a (traço ponto), $3\tau_a$ (pontilhado) e em regime de equilíbrio (linha sólida).



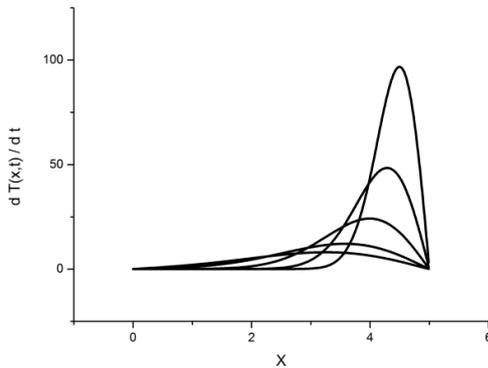
Fonte: o próprio autor.

Figura 3. Gradiente das distribuições de temperatura $T_a(x, t)$ e $T_b(x, t)$ para $t = \frac{\tau_a}{4}$ (traço curto), τ_a (traço ponto), $3\tau_a$ (pontilhado) e em regime de equilíbrio (linha sólida).



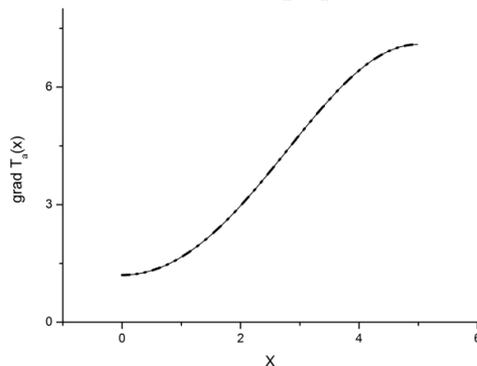
Fonte: o próprio autor.

Figura 4. Distribuição $\frac{dT(x, t)}{dt}$ para $t = \frac{\tau_a}{4}, \tau_a, 2\tau_a, 3\tau_a$ e $4\tau_a$. A distribuição propaga-se para a esquerda e diminui de intensidade com o tempo.



Fonte: o próprio autor.

Figura 5. Gradiente de $T_a(x)$ para $t = \tau_a$. Da expressão (13) (linha sólida) e (37) (linha pontilhada). As curvas se superpõem.



Fonte: o próprio autor.

Conclusões

Soluções de problemas físicos, em regime transiente, dadas na forma de séries de funções analíticas, são, pela sua própria natureza, difíceis de serem analisadas e aspectos importantes dos processos físicos podem não se apresentar de uma maneira clara. Neste trabalho, a solução da equação de difusão do calor em um sistema homogêneo e unidimensional, obtida por diferentes métodos de solução, e para diferentes conjuntos de condições de contorno, permite a compreensão de aspectos não usualmente explorados na maioria dos trabalhos sobre o assunto. A influência das condições de contorno sobre a forma e “velocidade” com que ocorre o processo é claramente explicitada. Aspectos como o comportamento da distribuição da taxa de variação da temperatura com o tempo no interior do sistema são verificados. O ataque ao problema por caminhos distintos para obtenção das soluções leva-nos a obtenção de identidades matemáticas não usualmente encontradas em tabelas de relações matemáticas. A importância da utilização de ferramental computacional como elemento útil na análise de aspectos físicos dos processos e na verificação de identidades matemáticas é enfatizada. Os resultados obtidos, além de poderem ser estendidos para problemas em duas ou três dimensões, dependendo da simetria, ou problemas mais complexos, constituem-se, para estudantes de graduação, em um conteúdo excelente para o aprendizado de técnicas matemáticas de solução de problemas.

Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for Physicist*. 4. ed. London: Academic Press, 2001.
- BUTKOV, E. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER J. C. *Conduction of heat in solids*. 2. ed. London: Oxford University Press, 1959.

DINCER, I. Simplified solution for temperature distributions of spherical and cylindrical products during rapid air cooling. *Energy Convers. Mgmt*, v. 36, n. 12, p. 1175-1184, 1995.

KESSLER, G. Steady state and transient profiles in a multishell spherical system heated internally by reactor-grade plutonium. *Nuclear Engineering and Design*, Texas, v. 239, p. 2430-2443, 2009.

MONTE, F. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Chicago, v. 43, p. 3607-3619, 2000.

MORSE, P. M.; FESCHBACH, H. *Methods of theoretical physics*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953.

Agradecimentos

Os autores agradecem à PROPPG/UEL pelo apoio ao projeto nº 08107.

Apêndice A

Verificação da igualdade:

$$\frac{1}{S} \frac{\sinh \frac{\sqrt{S}}{a} x}{\sqrt{S} L} = \frac{x}{SL} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{1}{S + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2}} \quad (A1)$$

Usando as expansões das funções seno hiperbólico \mathcal{X} e cossecante hiperbólica \mathcal{X} :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (A2)$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots \quad (A3)$$

O lado esquerdo de (A1) escreve-se como:

$$\frac{1}{S} \left\{ \frac{\sqrt{S}}{a} x + \frac{1}{3!} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} x \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} x \right)^5 + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{S} L} - \frac{1}{6} \frac{\sqrt{S}}{a} L + \frac{7}{360} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^3 - \frac{31}{15120} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^5 + \dots \right\} \quad (A4)$$

ou

$$\frac{\sqrt{S}}{S a} x \frac{1}{\sqrt{S} L} + \frac{\sqrt{S}}{S a} x \left\{ -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{S}}{a} L + \frac{7}{360} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^3 - \frac{31}{15120} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^5 + \dots \right\} + \frac{1}{531} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} x \right)^3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{S} L} - \frac{1}{6} \frac{\sqrt{S}}{a} L + \frac{7}{360} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^3 - \frac{31}{15120} \left(\frac{\sqrt{S}}{a} L \right)^5 + \dots \right\} + \dots \quad (A5)$$

ou ainda, de uma forma mais resumida, como:

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \Sigma_1 x + \Sigma_2 x^3 + \Sigma_3 x^5 + \dots \quad (A6)$$

onde:

$$\Sigma_1 x = \frac{x}{S} \left\{ -\frac{SL}{6a^2} + \frac{7}{360} \frac{S^2 L^3}{a^4} - \frac{31}{15120} \frac{S^3 L^5}{a^6} + \dots \right\}$$

$$\Sigma_2 x^3 = \frac{x^3}{S} \frac{1}{3!} \left\{ \frac{S}{La^2} - \frac{1}{6} \frac{S^2 L}{a^4} + \frac{7}{360} \frac{S^3 L^3}{a^6} + \dots \right\}$$

Explicitando a somatório no lado direito de (A1)

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}}{S + \frac{\pi^2 a^2}{L^2}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}}{2 \left(S + \frac{4\pi^2 a^2}{L^2} \right)} - \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}}{3 \left(S + \frac{9\pi^2 a^2}{L^2} \right)} + \dots \right\} \quad (A7)$$

e definindo a quantidade S como: $S = \frac{y^2 a^2}{L^2}$

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \frac{2L^2}{\pi a^2} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}}{\pi^2 \left(1 + \frac{y^2}{\pi^2} \right)} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}}{8\pi^2 \left(1 + \frac{y^2}{4\pi^2} \right)} - \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}}{27\pi^2 \left(1 + \frac{y^2}{9\pi^2} \right)} + \dots \right\} \quad (A8)$$

ou

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \frac{2L^2}{\pi^3 a^2} \left\{ -\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \left[1 - \frac{y^2}{\pi^2} + \left(\frac{y^2}{\pi^2} \right)^2 - \left(\frac{y^2}{\pi^2} \right)^3 + \dots \right] + \frac{2L^2}{\pi^3 a^2} \frac{1}{8} \left\{ -\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \left[1 - \frac{y^2}{4\pi^2} + \left(\frac{y^2}{4\pi^2} \right)^2 - \left(\frac{y^2}{4\pi^2} \right)^3 + \dots \right] + \dots \right\} \right\} \quad (A9)$$

Expandindo $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ em série de potências e coletando os termos proporcionais a x,

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \frac{2L^2}{\pi^3 a^2} \left\{ -\frac{\pi x}{L} \left[1 - \frac{y^2}{\pi^2} + \left(\frac{y^2}{\pi^2} \right)^2 - \left(\frac{y^2}{\pi^2} \right)^3 + \dots \right] + \frac{2L^2}{\pi^3 a^2} \left\{ \frac{2\pi x}{L} \left[\frac{1}{8} - \frac{y^2}{32\pi^2} + \frac{y^4}{128\pi^4} - \frac{y^6}{512\pi^6} + \dots \right] - \frac{2L^2}{\pi^3 a^2} \left\{ \frac{3\pi x}{L} \left[\frac{1}{27} - \frac{y^2}{3^5 \pi^2} + \frac{y^4}{3^7 \pi^4} - \frac{y^6}{3^9 \pi^6} + \dots \right] + \dots \right\} + \dots \right\} + \text{termos em outras potências de } x \quad (A10)$$

ou, rearranjando estes termos,

$$\Sigma = \frac{x}{LS} + \frac{2Lx}{\pi^2 a^2} \left[\frac{-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots}{\frac{-\pi^2}{12}} \right] + \dots \quad (A11)$$

$$\frac{2Lx}{\pi^2 a^2} \frac{y^2}{\pi^2} \left[\frac{1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} - \frac{1}{256} + \dots}{\frac{7\pi^4}{720}} \right]$$

+ termos de outras potências em x.

Deste modo:

$$\Sigma = \frac{x}{LS} - \frac{Lx}{6a^2} + \frac{7SL^3}{360a^4} + \dots + \Sigma_2 x^3 + \dots \quad (A12)$$

E a comparação de (A12) com (A6) permite ver que a identidade (A1) pode ser verificada potência por potência de x.

Apêndice B

Consistência da solução obtida pelo método de Laplace.

Calculando as derivadas $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ da solução (35) é direto verificar-se que $T(x,t)$ satisfaz a equação de difusão. Adicionalmente, $T(x,t)$ precisa satisfazer à condição inicial, $T(x,t) = T_1$ quando t vai à zero, o que é evidente na solução. Da mesma forma a condição de contorno $T(0,t) = T_1$ é obtida fazendo-se $x=0$ nesta expressão. Para a posição $x=L$ temos que:

$$T(L,t) = T_1 + 2 \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{2(n+1)L}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du - \int_0^{\frac{2L}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \right\} \quad (B1)$$

ou,

$$T(L,t) - T_1 = \Delta T \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{(n+1)L}{a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{nL}{a\sqrt{t}}\right) \right\} = \Delta T \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{(n+1)L}{a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{nL}{a\sqrt{t}}\right) \right\} = \Delta T \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N \quad (B2)$$

Onde:

$$\Sigma_N = -\operatorname{erf}(0) + \operatorname{erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{L}{a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{2L}{a\sqrt{t}}\right) - \dots + \operatorname{erf}\left(\frac{NL}{a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{NL}{a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{(N+1)L}{a\sqrt{t}}\right) \quad (B3)$$

De maneira que no limite em que $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{erf}\left(\frac{(N+1)L}{a\sqrt{t}}\right) = 1 \quad (B4)$$

e $T(L,t) = T_1 + \Delta T = T_2$ que é a condição de contorno para esta posição.

