

Um Desenvolvimento Numérico nas Equações Dinâmicas de Sólitons em Fibras Óticas

A Numerical Development in the Dynamical Equations of Solitons in Optical Fibers

Diogo Albino de Queiroz¹; Paulo Laerte Natti²; Neyva Maria Lopes Romeiro³;
Érica Regina Takano Natti⁴

Resumo

Avaliamos a resolução numérica de um sistema de equações diferenciais não-lineares, que descreve a propagação de sólitons em fibras óticas dielétricas, por meio do método de elementos finitos, implementado a partir de formulações *streamline upwind* Petrov-Galerkin (SUPG) e *consistent approximate upwind* (CAU).

Palavras-chave: Fibra ótica. Sóliton. Método de elementos finitos.

Abstract

It was evaluated the numerical resolution of a nonlinear differential equations system that describes the solitons propagation in dielectric optical fibers, through the method of finite elements, which is implemented based on Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) and Consistent Approximate Upwind (CAU) formulations.

Key words: Optical fiber. Soliton. Finite elements method.

¹ Bolsista de Iniciação Científica IC/UEL. Aluno de graduação em Ciência da Computação do Departamento de Computação da Universidade Estadual de Londrina, Londrina- PR. E-mail: daqueiroz@dc.uel.br.

² Professor Doutor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR. Email: plnatti@uel.br.

³ Professora Doutora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR. E-mail: nromeiro@uel.br.

⁴ Professora Doutora da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Londrina -PR. E-mail: erica.takano@uol.com.br.

Introdução

Recentemente, considerável atenção tem sido dada ao estudo de uma classe de equações diferenciais de campos acoplados com não-linearidades de segunda ordem nos campos. Uma grande variedade de fenômenos pode ser descrita por esses sistemas de equações, em particular, fenômenos não-lineares em ótica. Comunicação ótica (HAUS; WONG, 1996), *light bullets* (MALOMED et al., 2005), aparelhos óticos tais como interferômetros do tipo Mach-Zehnder (ASSANTO et al., 1993), *couplers* direcionais (LEDERER et al., 1990) e outros (TAYLOR, 1992; HASEGAWA; KODAMA, 1995) são descritos por tais equações.

Nosso interesse em estudar esses sistemas de equações é aplicá-las ao estudo da estabilidade de sinais em fibras óticas com geometria transversal retangular, nas quais as ondas estacionárias do tipo sólitons são possíveis (GALLEAS et al., 2003; YMAI et al., 2004).

Os sólitons podem ser utilizados em comunicações a longa distância sem a necessidade de estações repetidoras, inclusive em comunicações transoceânicas, como foi proposto por Hasegawa (1984). A comunicação convencional utiliza sinais lineares, no formato NRZ (*nonreturn to zero*), que são regenerados eletronicamente, e, então, retransmitidos. A localização e a distância das estações repetidoras são escolhidas, de modo que ainda seja possível recuperar o sinal com uma taxa de erro menor que 1 bit em 10^9 bits. Atualmente, essa distância varia entre 120-150 Km. Por outro lado, Nagazawa et al. (1991) haviam propagado sólitons em laboratório, num sistema fechado (em *loop*) de fibras, a distâncias superiores a 10^6 Km já em 1991, utilizando moduladores de amplitude.

As propriedades dielétricas que fibras óticas devem apresentar, de modo que a comunicação via sólitons seja mais estável e eficaz que a comunicação via sinais lineares no formato NRZ, é de grande interesse comercial e tecnológico. Por apresentar diversas aplicações potenciais em Telecomunicações, estudos

sobre a propagação e a estabilidade de sólitons têm tido um grande crescimento nos últimos quinze anos (HAUS; WONG, 1996; QIN; DAI; ZHANG, 2005).

Neste trabalho faremos um estudo numérico de sistemas de equações diferenciais, assintoticamente equivalentes à equação de Schrödinger não-linear (ZAKHAROV; SABAT, 1972; HASEGAWA; TAPPERT, 1973; MENYUK; SCHIEK; TORNER, 1994). Essas equações descrevem a evolução de ondas tipo sólitons em fibras óticas com não-linearidades quadráticas, também chamadas de guias dielétricos do tipo $\chi^{(2)}$. Este estudo será implementado para um sistema simplificado de equações diferenciais parciais (EDP's), o qual apresenta soluções analíticas conhecidas (GALLEAS et al., 2003). Desse modo iremos ajustar e avaliar um procedimento numérico desenvolvido por Romeiro e colaboradores, baseado no método de elementos finitos com formulações do tipo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* - SUPG (GALEÃO; CARMO, 1988; BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; FRANCA; MALLET, 1986) e do tipo *Consistent Approximate Upwind* - CAU (ALMEIDA; GALEÃO, 1993; GALEÃO et al., 2004).

A partir deste trabalho, será possível estudar a solução numérica de sistemas de EDP's mais complexos, que descrevem de forma realista a propagação de sólitons em materiais dielétricos. Esses sistemas, ditos realistas, não têm soluções analíticas conhecidas, de forma que o tratamento numérico é uma maneira possível para simular e otimizar a propagação destas ondas em função das propriedades dielétricas dos materiais (YMAI et al., 2004).

Para o desenvolvimento deste trabalho propomos três etapas. Na primeira etapa, a partir de um sistema de EDP's, que descreve a propagação de sóliton ideais em fibras óticas do tipo $\chi^{(2)}$, deduzimos um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) equivalente. Na segunda etapa, apresentamos as diretrizes, referentes ao procedimento numérico, para a resolução do sistema de EDO's obtido. Na terceira etapa, comparando graficamente as soluções analíticas conhecidas com as soluções numéricas obtidas, analisamos o método numérico quando

aplicado ao sistema de equações diferenciais discutidos neste trabalho.

Dinâmica Longitudinal de Campos Acoplados em Dielétricos $\chi^{(2)}$

O sistema de EDP's não-lineares, obtido a partir das equações de Maxwell, descreve a evolução longitudinal de duas ondas eletromagnéticas acopladas (modos fundamental e segundo harmônico) em guias de ondas (fibras óticas) com não-linearidades do tipo $\chi^{(2)}$. Esse sistema é apresentado nas equações (1) e (2) (GALLEAS et al., 2003).

$$i \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2} + a_1^* a_2 \exp(-i\beta\xi) = 0 \quad (1)$$

$$i \frac{\partial a_2}{\partial \xi} - i\delta \frac{\partial a_2}{\partial s} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial s^2} + a_1^2 \exp(i\beta\xi) = 0 \quad (2)$$

Onde $a_1(s, \xi)$ e $a_2(s, \xi)$ são variáveis complexas e representam as amplitudes normalizadas das ondas fundamental e segundo harmônico, respectivamente.

O sistema dado em (1) e (2) apresenta soluções analíticas do tipo sólitons para certas faixas de valores de r , α , β e δ (YMAI et al., 2004). Vejamos como estas quantidades caracterizam as propriedades não-lineares (dielétricas) da fibra ótica. No limite $|\beta| \rightarrow \infty$, as equações diferenciais (1) e (2) reduzem-se à equação de Schrödinger não-linear (NLSE) (MENYUK; SCHIEK; TORNER, 1994), correspondendo ao limite de incompatibilidade de fase (ondas fora de fase). Consequentemente, a quantidade β mede a taxa de geração do segundo harmônico, ou ainda, a intensidade de não-linearidade do material. A quantidade α mede a dispersão relativa das velocidades de grupo das ondas fundamental e segundo harmônico no material (fibra ótica). Para valores de $|\alpha| > 1$, a onda do segundo harmônico possui dispersão maior que a onda fundamental e para valores de $|\alpha| < 1$ é a onda fundamental que tem dispersão maior. A quantidade r é um indicador do regime de dispersão da onda fundamental. Quando temos $r = +1$, a onda

fundamental encontra-se no regime de dispersão dito normal, porém se $r = -1$, a onda fundamental encontra-se no regime de dispersão dito anômalo. Enfim, a quantidade δ mede a diferença das velocidades de grupo dos modos fundamental e segundo harmônico, e assume valores não-nulos, por exemplo, em meios anisotrópicos, quando os vetores de Poynting destes modos estão desalinhados (*walk-off wave*). No trabalho de Galleas et al. (2003), encontra-se uma descrição pormenorizada da dedução da solução das equações (1) e (2) e da interpretação das quantidades dielétricas α , β , δ e r , relacionando-as com as propriedades óticas da fibra.

Observamos que podemos escolher as características da onda sóliton a ser propagada na fibra ótica (velocidade, largura, amplitude, estabilidade, etc.), selecionando ou propondo materiais com as propriedades dielétricas α , β , δ e r adequadas.

As soluções analíticas tipo sólitons das equações (1) e (2) são conhecidas (MENYUK; SCHIEK; TORNER, 1994; GALLEAS et al., 2004) e apresentadas em (3) e (4),

$$a_1(s, \xi) = |\beta|^{1/2} \hat{a}_1(s, \xi) \quad (3)$$

$$a_2(s, \xi) = \hat{a}_2(s, \xi) \exp(i\beta\xi) \quad (4)$$

onde

$$\hat{a}_1 = \pm \frac{3}{2(\alpha - 2r)} \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \left(\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right) \times \quad (5)$$

$$\text{sch}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{1}{2(2r - \alpha)} \left(\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right)} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \times$$

$$\exp \left\{ i \left[\frac{r\delta^2(4r - 5\alpha)}{2(2\alpha - r)^2(2r - \alpha)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{i\delta}{2\alpha - r} s \right\}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{3r}{2(\alpha - 2r)} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \times$$

$$\text{sch}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{1}{2(2r - \alpha)} \left(\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right)} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \times$$

$$\exp \left\{ 2i \left[\frac{r\delta^2(4r - 5\alpha)}{2(2\alpha - r)^2(2r - \alpha)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{2i\delta}{2\alpha - r} s \right\}$$

Por simplicidade, consideraremos $\delta = 0$ no desenvolvimento numérico de (1) e (2). No caso da propagação de sólitons em fibras óticas ordinárias, e em situações não-críticas, o fenômeno *walk-off wave* pode ser desconsiderado (ARTIGAS; TORNER; AKHMEDIEV, 1999), o que justifica tomar $\delta = 0$ nestas situações. Assim, o sistema de EDP's torna-se separável e as soluções estacionárias de (1) e (2) têm a forma

$$a_v = (-1)^v U_v(s) \exp(i\kappa_v \xi) \quad (7)$$

onde $v = 1, 2$. O cálculo das derivadas parciais é dado por

$$\frac{\partial a_v}{\partial \xi} = (-1)^v i\kappa_v U_v(s) \exp(i\kappa_v \xi) \quad (8)$$

$$\frac{\partial a_v}{\partial s} = (-1)^v \exp(i\kappa_v \xi) \frac{\partial U_v}{\partial s} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 a_v}{\partial s^2} = (-1)^v \exp(i\kappa_v \xi) \frac{\partial^2 U_v}{\partial s^2} \quad (10)$$

Cabe observar que $a_1^* = -U_1(s) \exp(-i\kappa_1 \xi)$. Substituindo (7) e (10) em (1), obtém-se:

$$\kappa_1 U_1 \exp(i\kappa_1 \xi) + \frac{r}{2} \exp(i\kappa_1 \xi) \frac{\partial^2 U_1}{\partial s^2} - U_1 U_2 \exp[i(-\kappa_1 + \kappa_2 - \beta)\xi] = 0 \quad (11)$$

Analogamente, substituindo (7) e (10) em (2), segue que

$$\kappa_2 U_2 \exp(i\kappa_2 \xi) + \frac{\alpha}{2} \exp(i\kappa_2 \xi) \frac{\partial^2 U_2}{\partial s^2} - U_1^2 \exp[i(2\kappa_1 + \beta)\xi] = 0 \quad (12)$$

Tomando $\kappa_2 = 2\kappa_1 + \beta$, condição necessária para que (1) e (2) tenham soluções do tipo (7), obtemos o sistema de EDO's que descreve a evolução de $U_1(s)$ e $U_2(s)$, ou seja,

$$\frac{r}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial s^2} + \kappa_1 U_1 - U_1 U_2 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial s^2} + \kappa_2 U_2 - U_1^2 = 0 \quad (14)$$

Onde todas as variáveis e constantes são reais. As constantes r , α e β são obtidas a partir das propriedades materiais da fibra ótica, enquanto o chamado deslocamento não-linear do número de onda κ_v , para $v = 1, 2$, parametriza uma família de soluções. Na próxima etapa, iremos descrever o procedimento numérico utilizado nas equações (13) e (14).

Procedimento Numérico

Para resolver numericamente o sistema de equações diferenciais dado em (13) e (14), utilizamos o método de elementos finitos obtido a partir da formulação de *Petrov-Galerkin* (GALEÃO; CARMO, 1988). Sabe-se que simulações numéricas calculadas por elementos finitos usuais, tais como o método de *Galerkin*, apresentam dificuldades numéricas relacionadas à deficiência na estabilidade, gerando assim oscilações espúrias (ALMEIDA, et al., 2004). Para contornar este problema, são usados métodos estabilizados do tipo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin - SUPG* (GALEÃO; CARMO, 1988; BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; FRANCA; MALLET, 1986) e do tipo *Consistent Approximate Upwind - CAU* (ALMEIDA; GALEÃO, 1993; GALEÃO et al., 2004).

Um código computacional em FORTRAN 90, desenvolvido por um dos autores (ROMEIRO; CASTRO; LANDAU, 2003), foi ajustado para simular nosso problema. Na etapa seguinte, comparando graficamente as soluções numéricas obtidas com as soluções analíticas conhecidas, poderemos tirar conclusões sobre a metodologia numérica empregada.

Resultados Numéricos e Analíticos

Para o código que calcula a solução numérica das equações (13) e (14), são fornecidos valores para as quantidades dielétricas α , β e r , que definem as características do sóliton a ser propagado na fibra ótica. Experimentalmente, para fibras óticas comerciais, estas quantidades podem assumir os seguintes valores: $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$ e $r = -1$. É importante observar que, nas equações (13) e (14), todas as variáveis e quantidades dielétricas são adimensionais (GALLEAS et al., 2003). A variável temporal ξ é fixada em $\xi = 10$, de modo que a variável espacial s descreverá a forma do envelope da onda sóliton, ao longo da fibra ótica, para este “instante” fixado. Resta ainda fornecer as condições iniciais, ou ainda, o formato inicial do envelope da onda que será injetado na fibra ótica. Novamente, com o objetivo de simplificar os procedimentos, quando da comparação das soluções numérica e analítica, tomamos como condição inicial no contorno esquerdo da fibra ótica, uma onda tipo sóliton. Tomando $s = 0$ nas soluções analíticas (5) e (6), tem-se de (7) que as condições no contorno esquerdo são $U_1(0, \xi) = \frac{-3\beta\sqrt{\alpha r}}{2(\alpha - 2r)}$ e $U_2(0, \xi) = \frac{3\beta r}{2(\alpha - 2r)}$.

Para o contorno direito, o gradiente de ambas as ondas são fixados em zero, pois para distâncias s suficientemente grandes as amplitudes U_1 e U_2 tendem a zero, de modo que a taxa de variação (gradiente) destas no contorno direito também tendem a zero.

Das equações (13) e (14), considerando uma partição com 30 elementos, conseqüentemente 31 nós, e com intervalos $\Delta s = 0.5$, obtivemos os resultados numéricos que podem ser observados na figura 1. Como esperado, as condições no contorno esquerdo, no instante $\xi = 10$, fazem com que a onda sóliton esteja centrada em $s = 0$ e tenda a zero para valores maiores da variável s .

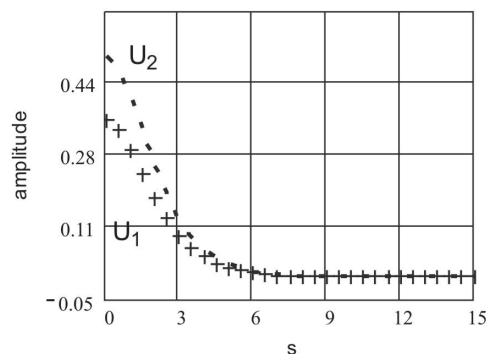


Figura 1. Resultados numéricos, em $\xi = 10$, de $U_1(s, \xi)$ (símbolo) e $U_2(s, \xi)$ (linha tracejada).

Substituindo em (7) as soluções numéricas obtidas para $U_1(s, \xi)$ e $U_2(s, \xi)$, calculamos as amplitudes complexas $a_1(s, 10)$ e $a_2(s, 10)$ das equações (1) e (2). Na figura 2, apresentamos as partes real e imaginária dessas amplitudes.

Enfim, as soluções numéricas apresentadas na figura 2 são graficamente comparadas com as soluções analíticas, conhecidas na literatura (YMAI

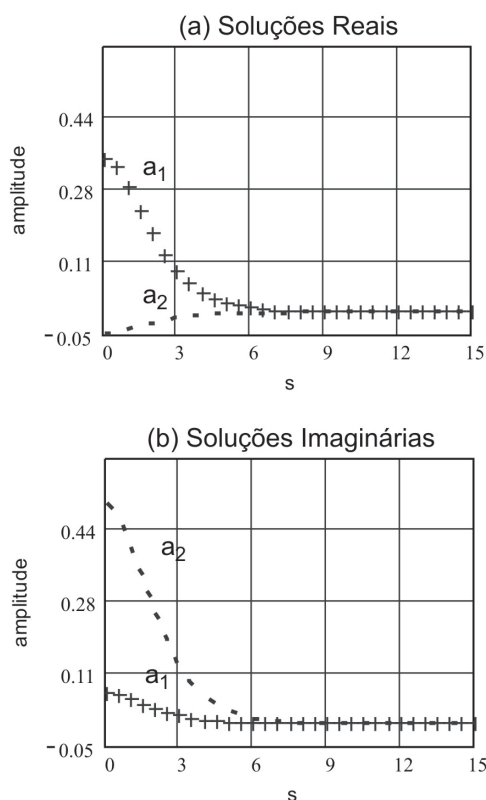


Figura 2. Soluções numéricas, em $\xi = 10$, das amplitudes $a_1(s, \xi)$ (símbolo) e $a_2(s, \xi)$ (linha tracejada). (a) Parte real das soluções, e (b) parte imaginária das soluções.

et al., 2004), apresentadas em (5) e (6). Para realizar a comparação de forma consistente, entre as soluções numéricas e exatas, tomamos em $\xi = 10$ os valores $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$, $r = -1$ e $\delta = 0$ para as quantidades dielétricas em (5) e (6). Os resultados podem ser observados nas figuras 3 e 4.

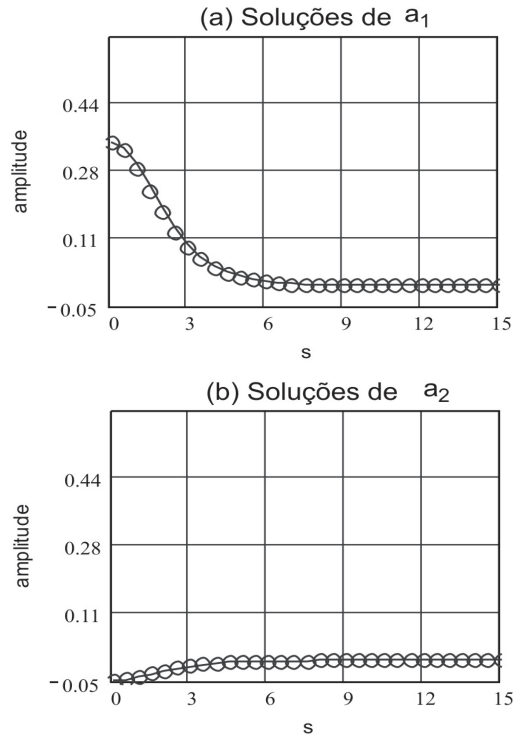


Figura 3. Comparações entre as soluções numéricas (símbolo) e analíticas (linha contínua). (a) Solução $\text{Re}(a_1)$, e (b) solução $\text{Re}(a_2)$.

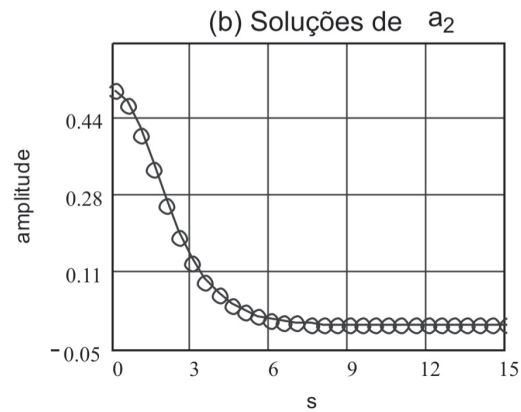
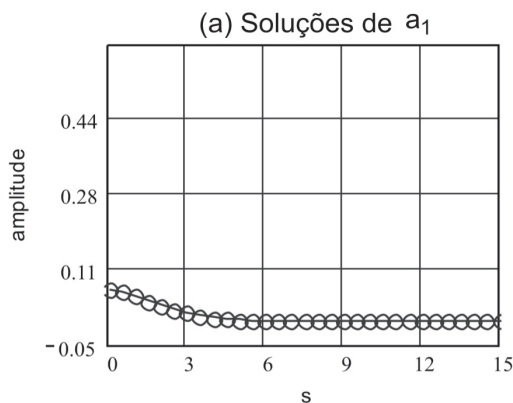


Figura 4. Comparações entre as soluções numéricas (símbolo) e analíticas (linha contínua). (a) Solução $\text{Im}(a_1)$, e (b) solução $\text{Im}(a_2)$.

Conclusões

Verificamos que o sistema de equações diferenciais não-lineares, que descreve a evolução longitudinal de sólitons (duas ondas eletromagnéticas acopladas - modos fundamental a_1 e segundo harmônico a_2) em fibras óticas do tipo $\chi^{(2)}$, torna-se um sistema de EDP's separável, quando $\delta = 0$, cujas soluções estacionárias podem ser obtidas numericamente, veja as figuras 1 e 2, segundo o desenvolvimento numérico descrito anteriormente.

Além disto, a partir dos resultados apresentados nas figuras 3 e 4, observamos que as soluções analíticas descritas em (3) e (6), considerando $\delta = 0$, comparadas com as soluções numéricas de (13) e (14), substituídas em (7), são graficamente muito próximas. Desses resultados podemos concluir que o método numérico permitiu obter soluções aceitáveis.

Como perspectiva de continuidade deste trabalho, aplicaremos o método numérico desenvolvido na simulação da propagação de sinais do tipo sólitons ideais, ao caso de fibras óticas não-ideais, onde estudaremos como pequenas perturbações locais afetam a estabilidade destes. Sabe-se que inhomogeneidades (difusão de moléculas hidrogênio, bolhas, impurezas metálicas,...) e defeitos (variação do diâmetro, rugosidade, sinuosidade no eixo, microcurvaturas, emendas, ..) da fibra ótica são as

principais causas de absorção-dissipação da onda sóliton (RAGHAVAN; AGRAWAL, 2000; STROBEL, 2004). Supondo uma absorção da ordem de 2dB/Km, e um processo de bombeamento do sinal com geração de ruído, estudaremos numericamente a estabilidade da propagação de sólitons por grandes distâncias (WERNER; DRUMMOND, 1993). Nestas modelagens não-ideais a descrição analítica da propagação do sinal não é conhecida e somente um tratamento numérico poderá indicar novos caminhos para as Ciências dos Materiais Dielétricos e das Telecomunicações.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Universidade Estadual de Londrina pelo apoio financeiro a pesquisa, através do Programa FAEPE/2005 - Fundo de Apoio ao Ensino, Pesquisa e Extensão, e através da bolsa de Iniciação Científica, Programa PROIC/UDEL, fornecida a D. A. de Queiroz.

Referências

ALMEIDA, R. C. C.; GALEÃO, A. C. The generalized CAU operator for the compressible Euler and Navier-Stokes equations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN LAMINAR AND TURBULENT FLOWS, 8., Swansea, 1993. *Proceedings...* Swansea: C. Taylor, 1993.

ALMEIDA, R. C.; GALEAO, A. C.; MALTA, S. M. C.; LOULA, A. F. D. Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems. *Applied Numerical Mathematics*, Amsterdam, v.48, n.2, p.205-222, feb. 2004.

ARTIGAS, D.; TORNER, L.; AKHMEDIEV, N. N. Dynamics of quadratic soliton excitation. *Optics Communications*, Amsterdam, v.162, n.4/6, p.347-356, apr. 1999.

ASSANTO, G.; STEGEMAN, G.; SHEIK-BAHAE, M.; STRYLAND, E. V. All optical-switching devices based on large nonlinear phase shifts from second harmonic generation. *Applied Physics Letters*, New York, v.62, n.12, p.1323-1325, mar. 1993.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulation for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Amsterdam, v.32, n.1/3, p.199-259, 1982.

GALEÃO, A. C.; ALMEIDA, R. C.; MALTA, S. M. C.; LOULA, A. F. D. Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems. *Applied Numerical Mathematics*, Amsterdam, v.48, n.2, p.205-222, feb. 2004.

GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, Amsterdam, v.68, n.1, p.83-95, may 1988.

GALLEAS, W.; YMAI, L. H.; NATTI, P. L.; TAKANO NATTI, E. R. Ondas do tipo sólitons em dielétricos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v.25, n.3, p.294-304, 2003.

HASEGAWA, A. Numerical study of optical soliton transmission periodically by the stimulated Raman process. *Applied Optics*, New York, v.23, n.19, p.3302-3309, 1984.

HASEGAWA, A.; KODAMA Y. *Solitons in optical communications*. Oxford: Clarendon, 1995.

HASEGAWA, A.; TAPPERT, F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, New York, v.23, n.4, p.172-172, 1973.

- HAUS, H. A.; WONG, W. S. Soliton in optical communications. *Reviews of Modern Physics*, Minneapolis, v.68, n.2, p.423-444, apr. 1996.
- HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L. P.; MALLETT, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of Thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, Amsterdam, v.54, n.2, p.223-234, feb. 1986.
- LEDERER, F.; BERTOLOTTI, M.; SIBILIA, C.; LEUTHEUSER, E. V. An externally controlled nonlinear directional coupler. *Optics Communications*, Amsterdam, v.75, n.3/4, p.246-250, mar. 1990.
- MALOMED, B. A.; MIHALACHE, D.; WISE, F.; TORNER, L. Spatiotemporal optical solitons. *Journal of Optics B*, Bristol, v.7, n.5, p.R53-R72, may 2005.
- MENYUK, C. R.; SCHIEK, R.; TORNER, L. Solitary waves due to $\chi^{(2)}$: cascading. *Journal of the Optical Society of America B - Optical Physics*, Washington, v.11, v.12, p.2434-2443, dec. 1994.
- QIN, Y.; DAI, C. Q.; ZHANG, J. F. Higher-order effects induced optical solitons in fiber. *International Journal of Theoretical Physics*, New York, v.44, n.8, p.1117-1121, aug. 2005.
- RAGHAVAN, S.; AGRAWAL, G. P. Spatiotemporal solitons in inhomogeneous nonlinear media. *Optics Communications*, Amsterdam, v.180, n.4/6, p.377-382, jun. 2000.
- ROMEIRO, N. M. L.; CASTRO, R. G. S.; LANDAU, L. Simulação numérica de modelos de qualidade de água usando o método de elementos finitos estabilizados. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- STROBEL, O. A. Fiber-optic transmission – an overview. *Telecomunicações*, Santa Rita do Sapucaí, v.7, n.2, p.1-9, dez. 2004.
- TAYLOR, J. R. *Optical solitons – Theory and experiments*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- WERNER, M. J.; DRUMMOND, P. D. Simulton solutions for the parametric amplifier. *Journal of the Optical Society of America B - Optical Physics*, Washington, v.10, n.12, p.2390-2393, dec. 1993.
- YMAI, L. H.; GALLEAS, W.; NATTI, P. L.; TAKANO NATTI, E. R. Estabilidade de sólitons em fibras óticas dielétricas de tipo . *Revista Ciências Exatas e Naturais*, Guarapuava, v.6, p.9-30, 2004.
- ZAKHAROV, V. E.; SABAT, A. B. Exact theory of 2-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP-USSR*, New York, v.34, n.1, p.62-69, 1972.